УДК 517.984

С.А. Бутерин

ОБ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ ВТОРОГО ПОРЯДКА

1. Пусть $\{\lambda_k\}_{k\geq 1}$ – спектр краевой задачи $L = L(q, M)$ вида

$$-y'' + q(x)y + \int_0^x M(x-t)y(t)\,dt = \lambda y, \quad 0 < x < \pi, \tag{1}$$

$$y(0) = y(\pi) = 0, \tag{2}$$

где $q(x)$, $(\pi - x)M(x) \in L_2(0,\pi)$. Собственные значения λ_k, $k \geq 1$, имеют вид

$$\lambda_k = \Big(k + \frac{1}{2\pi k}\int_0^\pi q(x)\,dx + \frac{\kappa_k}{k}\Big)^2, \quad \{\kappa_k\} \in l_2. \tag{3}$$

Рассмотрим следующую обратную задачу.

Обратная задача 1. По заданному спектру $\{\lambda_k\}_{k\geq 1}$ найти функцию $M(x)$ в предположении, что функция $q(x)$ известна априори.

В [1] доказана разрешимость этой обратной задачи «в малом», то есть когда последовательность $\{\lambda_k\}_{k\geq 1}$ достаточно близка в метрике пространства l_2 к спектру известной модельной задачи $\tilde L = L(q, \tilde M)$. Кроме того, там доказана устойчивость и глобальная единственность решения. Иным методом мы доказываем глобальную разрешимость рассматриваемой обратной задачи.

Теорема 1. Пусть дана функция $q(x) \in L_2(0,\pi)$. Тогда для всякой последовательности комплексных чисел $\{\lambda_k\}_{k\geq 1}$ вида (3) существует единственная (с точностью до значений на множестве меры нуль) функция $M(x)$, $(\pi - x)M(x) \in L_2(0,\pi)$, такая что $\{\lambda_k\}_{k\geq 1}$ является спектром краевой задачи $L(q, M)$ вида (1), (2).

Таким образом, асимптотика (3) является необходимым и достаточным условием разрешимости обратной задачи.

Доказательство теоремы 1 конструктивно и дает алгоритм решения обратной задачи, которая сводится к решению так называемого основного нелинейного интегрального уравнения относительно функции $M(x)$ (см. ниже уравнение (9)). Доказана его глобальная разрешимость в соответствующем классе функций. В [2] теорема 1 была получена для частного случая $q(x) \equiv \text{const}$. Отметим, что общий случай функции $q(x)$ значительно осложняет исследование основного уравнения обратной задачи.

2. Прежде чем перейти непосредственно к доказательству теоремы 1, приведем несколько вспомогательных утверждений. Рассмотрим интегральное уравнение

$$
\left.\begin{aligned}
2P(x,t) \; &= \int_{\frac{t}{2}}^{x-\frac{t}{2}} q(s)\,ds + \int_0^t (x-t)M(s)\,ds + \int_t^x q(s)\,ds \int_0^t P(s,\xi)\,d\xi + \\
&+ \int_{\frac{t}{2}}^{t} q(s)\,ds \int_0^{2s-t} P(s,\xi)\,d\xi - \int_{x-\frac{t}{2}}^{x} q(s)\,ds \int_0^{2(s-x)+t} P(s,\xi)\,d\xi + \\
&+ \int_0^t M(s)\,ds \int_t^x d\xi \int_0^{t-s} P(\xi-s,\eta)\,d\eta + \\
&+ \int_0^t M(s)\,ds \int_{\frac{t+s}{2}}^{t} d\xi \int_0^{2\xi-t-s} P(\xi-s,\eta)\,d\eta - \\
&- \int_0^t M(s)\,ds \int_{\frac{s-t}{2}+x}^{x} d\xi \int_0^{2(\xi-x)+t-s} P(\xi-s,\eta)\,d\eta, \; 0 \le t \le x \le \pi.
\end{aligned}\right\} \tag{4}
$$

Лемма 1. *Уравнение (4) имеет единственное решение $P(x,t)$, являющееся непрерывной функцией. При этом*

$$P(x,x) = 0, \quad P(x,0) = \frac{1}{2}\int_0^x q(t)\,dt.$$

Пусть функция $S(x,\lambda)$ является решением уравнения (1), удовлетворяющим начальным условиям

$$S(0,\lambda) = 0, \quad S'(0,\lambda) = 1.$$

Лемма 2. *Положим $\rho^2 = \lambda$. Тогда имеет место представление*

$$S(x,\lambda) = \frac{\sin\rho x}{\rho} + \int_0^x P(x,t)\frac{\sin\rho(x-t)}{\rho}\,dt, \tag{5}$$

где $P(x,t)$ – решение уравнения (4).

Собственные значения λ_k краевой задачи L совпадают с нулями ее характеристической функции $\Delta(\lambda) := S(\pi,\lambda)$. Согласно (4), (5) будем иметь

$$\Delta(\lambda) = \frac{\sin\rho\pi}{\rho} + \int_0^\pi w(x)\frac{\sin\rho x}{\rho}\,dx, \quad w(x) \in W_2^1[0,\pi], \tag{6}$$

причем

$$w(0) = 0, \quad w(\pi) = \frac{1}{2}\int_0^\pi q(x)\,dx. \tag{7}$$

Здесь

$$w(\pi - x) = P(\pi, x). \tag{8}$$

Чтобы подчеркнуть зависимость $P(x,t)$ от $M(x)$ будем писать $P(x,t;M)$. Обозначим

$$R(x,t;M) := \frac{\partial}{\partial t} P(x,t;M).$$

Тогда, дифференцируя обе части (8) по x, получим

$$-w'(\pi - x) = R(\pi, x; M), \quad 0 < x < \pi. \tag{9}$$

На соотношение (9) можно смотреть как на нелинейное уравнение относительно функции $M(x)$, которое назовем основным нелинейным интегральным уравнением обратной задачи. Отметим, что формула (8) принимает в частном случае $q := q(x) \equiv \mathrm{const}$ наиболее простой вид [2]

$$w(\pi - x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(\pi - x)^{\nu}}{\nu!} H^{*\nu}(x), \quad 0 < x < \pi,$$

где $H^{*1}(x) = H(x)$, $H^{*(\nu+1)}(x) = H * H^{*\nu}(x)$, а функция $H(x)$ связана с $M(x)$ соотношением

$$q + \int_0^x M(t)\, dt = 2H(x) - \int_0^x dt \int_0^t H(t-\tau) H(\tau)\, d\tau.$$

Справедлива следующая

Теорема 2. *Для любой функции $w(x) \in W_2^1[0,\pi]$, удовлетворяющей (7), уравнение (9) имеет единственное решение $M(x)$, $(\pi - x)M(x) \in L_2(0,\pi)$.*

В основе доказательства теоремы 2 лежит развитие идеи доказательства глобальной разрешимости нелинейного интегрального уравнения в свертках (см. [2, 3]).

Всякая функция $\Delta(\lambda)$ вида (6), (7) имеет счетное множество нулей λ_k, $k \geq 1$, вида (3) и определяется своими нулями однозначно по формуле

$$\Delta(\lambda) = \pi \prod_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_k - \lambda}{k^2}. \tag{10}$$

Справедливо также и обратное утверждение.

Лемма 3. *Пусть заданы произвольные комплексные числа λ_k, $k \geq 1$, вида (3). Тогда функция $\Delta(\lambda)$, определенная по формуле (10), имеет вид (6), (7).*

Доказательство теоремы 1. По заданной последовательности $\{\lambda_k\}_{k \geq 1}$ вида (3) строим функцию $\Delta(\lambda)$ по формуле (10). Согласно лемме 3 построенная функция $\Delta(\lambda)$ имеет представление (6) с некоторой функцией $w(x) \in W_2^1[0,\pi]$, удовлетворяющей (7). Пусть $M(x)$, $(\pi - x)M(x) \in L_2(0,\pi)$, является решением уравнения (9) с функцией $w(x)$. Рассмотрим соответствующую краевую задачу $L = L(q, M)$. Нетрудно увидеть, что функция $\Delta(\lambda)$ является характеристической функцией этой задачи L. Таким образом, спектр последней совпадает $\{\lambda_k\}_{k\geq 1}$. Единственность функции $M(x)$ следует из единственности решения основного уравнения (9). Теорема доказана.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ для государственной поддержки молодых российских ученых (проект МК-1701.2007.1) и грантов РФФИ и ННС (проекты 07-01-00003 и 07-01-92000-ННС-а).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Юрко В.А.* Обратная задача для интегро-дифференциальных операторов // Мат. заметки. 1991. Т. 50 (5). С. 134–144.
2. *Buterin S.A.* On an inverse spectral problem for a convolution integro-differential operator // Result. Math. 2007. Vol. 50. P. 173–181.
3. *Бутерин С.А.* Обратная спектральная задача восстановления оператора свертки, возмущенного одномерным оператором // Мат. заметки. 2006. Т. 80 (5). С. 668–682.

УДК 517.518.82

И.Ю. Выгодчикова

О СРЕДНЕГЕОМЕТРИЧЕСКОМ ПРИБЛИЖЕНИИ СЕГМЕНТНОЙ ФУНКЦИИ АЛГЕБРАИЧЕСКИМ ПОЛИНОМОМ

Постановка задачи

Пусть значениями функции $\Phi(\cdot)$ в узлах сетки $T = \{t_0 < t_1 < ... < t_N\}$ являются фиксированные отрезки (сегменты) $\Phi(t_k) = [y_{1,k}; y_{2,k}]$, причем $y_{2,k} \geq y_{1,k},\ k \in [0:N]$.

Рассмотрим задачу:

$$\eta(A) := \max_{k\in[0:N]} d(A, t_k) \longrightarrow \min_{A\in\mathbb{R}^{n+1}}, \tag{1}$$

где $d(A,t_k) = d_1(A,t_k)\cdot d_2(A,t_k)$, $d_i(A,t_k) = |p_n(A,t_k) - y_{i,k}|$, $i \in [1:2]$, $k \in [0:N]$, $p_n(A,t) = a_0 + a_1 t + \ldots + a_n t^n$ – алгебраический полином степени не выше n с вектором коэффициентов $A = (a_0, a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$. Задачу (1) можно записать в виде

$$\max_{k\in[0:N]} \left| \left(p_n\left(A, t_k\right) - \frac{y_{1,k} + y_{2,k}}{2} \right)^2 - \left(\frac{y_{2,k} - y_{1,k}}{2} \right)^2 \right| \longrightarrow \min_{A\in\mathbb{R}^{n+1}},$$

то есть требуется минимизировать максимальное по всем узлам сетки T расстояние между квадратом разности значения алгебраического полинома