является решением уравнения (9) с функцией $w(x)$. Рассмотрим соответствующую краевую задачу $L = L(q, M)$. Нетрудно увидеть, что функция $\Delta(\lambda)$ является характеристической функцией этой задачи L. Таким образом, спектр последней совпадает $\{\lambda_k\}_{k\geq 1}$. Единственность функции $M(x)$ следует из единственности решения основного уравнения (9). Теорема доказана.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ для государственной поддержки молодых российских ученых (проект МК-1701.2007.1) и грантов РФФИ и ННС (проекты 07-01-00003 и 07-01-92000-ННС-а).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Юрко В.А.* Обратная задача для интегро-дифференциальных операторов // Мат. заметки. 1991. Т. 50 (5). С. 134–144.

2. *Buterin S.A.* On an inverse spectral problem for a convolution integro-differential operator // Result. Math. 2007. Vol. 50. P. 173–181.

3. *Бутерин С.А.* Обратная спектральная задача восстановления оператора свертки, возмущенного одномерным оператором // Мат. заметки. 2006. Т. 80 (5). С. 668–682.

УДК 517.518.82

И.Ю. Выгодчикова

О СРЕДНЕГЕОМЕТРИЧЕСКОМ ПРИБЛИЖЕНИИ СЕГМЕНТНОЙ ФУНКЦИИ АЛГЕБРАИЧЕСКИМ ПОЛИНОМОМ

Постановка задачи

Пусть значениями функции $\Phi(\cdot)$ в узлах сетки $T = \{t_0 < t_1 < ... < t_N\}$ являются фиксированные отрезки (сегменты) $\Phi(t_k) = [y_{1,k}; y_{2,k}]$, причем $y_{2,k} \geq y_{1,k},\ k \in [0:N]$.

Рассмотрим задачу:

$$\eta(A) := \max_{k\in[0:N]} d(A, t_k) \longrightarrow \min_{A\in\mathbb{R}^{n+1}}, \tag{1}$$

где $d(A, t_k) = d_1(A, t_k) \cdot d_2(A, t_k)$, $d_i(A, t_k) = |p_n(A, t_k) - y_{i,k}|$, $i \in [1 : 2]$, $k \in [0 : N]$, $p_n(A, t) = a_0 + a_1 t + \ldots + a_n t^n$ – алгебраический полином степени не выше n с вектором коэффициентов $A = (a_0, a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$. Задачу (1) можно записать в виде

$$\max_{k\in[0:N]} \left| \left(p_n\left(A, t_k\right) - \frac{y_{1,k} + y_{2,k}}{2} \right)^2 - \left(\frac{y_{2,k} - y_{1,k}}{2} \right)^2 \right| \longrightarrow \min_{A\in\mathbb{R}^{n+1}},$$

то есть требуется минимизировать максимальное по всем узлам сетки T расстояние между квадратом разности значения алгебраического полинома и серединой сегмент-значения функции $\Phi(\cdot)$ и квадратом половины длины сегмент-значения функции $\Phi(\cdot)$ в этом узле за счет выбора коэффициентов алгебраического полинома.

Функции $d_i(A,t)$ непрерывны и выпуклы по A при каждом фиксированном $t \in T$. Функция $d(A,t)$, а также целевая функция $\eta(A)$ задачи (1) непрерывны, но не являются выпуклыми. Если $y_k := y_{2,k} = y_{1,k}, \forall k \in [0:N]$, то задача (1) сводится к известной выпуклой задаче П.Л. Чебышева о равномерном наилучшем приближении дискретной функции алгебраическим полиномом фиксированной степени:

$$\phi(A) := \max_{k\in[0:N]} |y_k - p_n(A,t_k)| \longrightarrow \min_{A\in\mathbb{R}^{n+1}}. \tag{2}$$

С экономической точки зрения задача (1) может быть весьма полезной для построения динамики долевых соотношений компонентов в системе.

Пример. Пусть в моменты $T = \{0 < 1 < 2\}$ зафиксирована следующая структура портфеля, состоящего из двух активов: $\{0,25 : 0,75; 0,5 : 0,5; 0,25 : 0,75\}$ (второй актив является доминирующим). Построим полином степени 1, применяя задачу (1). Получаем 2 решения $p_1^*(t) = 0,25 + 0,25t$ и $p_1^{**}(t) = 0,75 - 0,25t$, каждое из которых позволяет точно указать размер долей активов в портфеле в каждый момент. Если применять задачу (2), беря в качестве приближаемой функции долю каждого из активов, а также их среднее арифметическое, то получим менее удачные результаты: $p_1^*(t) = 0,375$, $p_1^{**} = 0,625$ и $p_1^{***} = 0,5$.

Ясно, что если существует полином, удовлетворяющий равенствам:

$$p_n(A,t_k) = y_{i_k,k}, \forall k \in [0:N], \text{где } i_k = 1 \quad \text{или } i_k = 2, \tag{3}$$

то вектор его коэффициентов будет решением задачи (1), при этом минимальное значение целевой функции будет равно нулю. Если $N \le n$, то каждое решение задачи (1) будет удовлетворять системе (3), в случае $N < n$ задача имеет бесконечно много решений, а при $N = n$ решений точно 2^{n+1}.

Вспомогательные утверждения

Используя известные факты из математического анализа, несложно получить следующие утверждения.

Лемма 1. *Пусть* $T = \{t_0 < t_1 < ... < t_N\}$ *и* $g_k = g(t_k)$, $g[t_k, t_{k+1}, \ldots, t_{k+s}]$ *– разделенные разности* s*-го порядка,* $s \le n$, $k \in [0 : n-s]$. *Тогда выполняется неравенство:*

$$|g[t_k, t_{k+1}, ..., t_{k+s}]| \le \frac{1}{s!} \cdot \frac{2^s \cdot l}{h^s},$$

где $h = \min_{k\in[0:n-1]} |t_{k+1} - t_k|$, $l = \max_{k\in[1:n]} |g_k - g_{k-1}|$.

Лемма 2. *Пусть $y_1, y_2 \in R$, $y_1 \le y_2$. Функция $f(y) := |y - y_1| \cdot |y - y_2|$*
a) достигает локального максимума при $y = 0,5(y_1 + y_2)$;
b) достигает абсолютного минимума при $y = y_1$ и при $y = y_2$;
c) убывает на множествах $y \in (-\infty; y_1]$, $y \in [0,5(y_1 + y_2); y_2]$;
d) возрастает на множествах $y \in [y_1; 0,5(y_1 + y_2)]$, $y \in [y_2; +\infty)$.

Лемма 3. *Пусть $y_1, y_2, \hat{y} \in R$ и $f(y) = |y - y_1| \cdot |y - y_2| \le \hat{y}$. Тогда выполняется неравенство: $|y| \le 0,5|y_1 + y_2| + 0,5\sqrt{(y_1 + y_2)^2 + 4|y_1 y_2| + 4\hat{y}}$.*

Существование решения

Лемма 4. *Пусть $\hat{A} \in R^{n+1}$ и $N \ge n$. Множество $M\left(\hat{A}\right) := \left\{A \in R^{n+1} : \eta(A) \le \eta\left(\hat{A}\right)\right\}$ не пусто, замкнуто и ограничено.*

Доказательство. Пусть $\hat{T} := \{t_{j_0} < ... < t_{j_n}\} \subset T$. Возьмем любое $A \in M\left(\hat{A}\right)$. Из неравенства $\eta(A) \le \eta\left(\hat{A}\right)$ вытекает $|p_n(A, t_{j_k}) - y_{1,j_k}| \cdot |p_n(A, t_{j_k}) - y_{2,j_k}| \le \eta\left(\hat{A}\right)$. Отсюда по лемме 3 получаем неравенство:

$$|p_{\mathrm{n}}(A, t_{j_k})| \le 0,5|y_{1,j_k} + y_{2,j_k}| + 0,5\sqrt{(y_{1,j_k} + y_{2,j_k})^2 + 4|y_{1,j_k} y_{2,j_k}| + 4\eta\left(\hat{A}\right)}.$$

Пользуясь формулой Ньютона [1, с. 303] и леммой 1, учитывая, что числа y_{i,j_k} и сетка $\hat{T}$ фиксированы, несложно увидеть, что коэффициенты такого полинома будут также ограничены некоторой константой [2, с. 19]. Непустота и замкнутость множества очевидны. Лемма доказана.

Теорема 1. *Задача (1) всегда имеет решение.*

Доказательство. Утверждение вытекает из равенства $\min\limits_{A \in R^{n+1}} \eta(A) = \min\limits_{A \in \mathrm{M}\left(\hat{\mathrm{A}}\right)} \eta(A)$, непрерывности функции $\eta(A)$ и леммы 4. Теорема доказана.

Обозначим через $\eta^* := \min\limits_{A \in R^{n+1}} \eta(A)$ минимальное значение целевой функции задачи (1), а через $\Omega := \left\{A \in R^{n+1} : \eta(A) = \eta^*\right\}$ – множество решений этой задачи. Далее считаем $N \ge n + 1$.

Необходимое условие решения

Теорема 2. *Если вектор $A^* \in R^{n+1}$ является решением задачи (1), то найдутся $(n + 2)$ точки $\sigma := \left\{t_{j_0} < ... < t_{j_{n+1}}\right\} \subset T$, для которых*

$$d(A^*, t_{j_k}) = \eta(A^*), \forall k \in [0 : n + 1]. \tag{4}$$

Доказательство. Пусть $A^* \in R^{n+1}$ является решением задачи (1) и $\eta(A^*) > 0$. Предположим, что утверждение теоремы не выполняется. Тогда имеем $d(A^*, t_{j_k}) = \eta(A^*), \forall k \in [0 : r]$, где $\hat{T} := \{t_{j_0} < \ldots < t_{j_r}\} \subset T$,

$0 \le r \le n$, а

$$d\left(A^*, t\right) < \eta\left(A^*\right), \forall t \in T \setminus \hat{T}. \tag{5}$$

Если $r < n$, то возьмем произвольно $(n-r)$ точек $t_{j_{r+1}} < ... < t_{j_n} \in T \backslash \hat{T}$ и построим вектор A_ε, решив систему уравнений:

$$\begin{gathered}
p_n\left(A_\varepsilon, t_{j_k}\right) = p_n\left(A^*, t_{j_k}\right) + \varepsilon, \quad \text{если } p_n\left(A^*, t_{j_k}\right) < y_{1,j_k} \text{ или} \\
p_n\left(A^*, t_{j_k}\right) \in \left[\tfrac{y_{1,j_k}+y_{2,j_k}}{2}; y_{2,j_k}\right), \\
p_n\left(A_\varepsilon, t_{j_k}\right) = p_n\left(A^*, t_{j_k}\right) - \varepsilon, \quad \text{если } p_n\left(A^*, t_{j_k}\right) > y_{2,j_k} \text{ или} \\
p_n\left(A^*, t_{j_k}\right) \in \left(y_{1,j_k}; \tfrac{y_{1,j_k}+y_{2,j_k}}{2}\right], k \in [0:r], \\
p_n\left(A_\varepsilon, t_{j_k}\right) = p_n\left(A^*, t_{j_k}\right), k \in [r+1:n], \quad \text{если} \quad r < n.
\end{gathered} \tag{6}$$

Из леммы 2 и (5), (6) получаем при достаточно малом $\varepsilon > 0$, $\eta\left(A_\varepsilon\right) < \eta\left(A^*\right)$, что противоречит оптимальности вектора A^*. Теорема доказана.

Таким образом, решения задачи (1) можно отыскать, решая относительно компонент вектора A и неизвестного η^* системы уравнений

$$d\left(A^*, t_{j_k}\right) = \eta^*, \forall k \in [0:n+1]$$

и проверяя каждый раз равенство $\eta^* = \eta(A)$.

Достаточное условие решения

Теорема 3. *Пусть для точек* $\sigma := \left\{t_{j_0} < ... < t_{j_{n+1}}\right\} \subset T$ *и вектора* A^* *выполняются равенства (4), причем*

$$\left(-1\right)^{\xi_k}\left(p_n\left(A^*, t_{j_k}\right) - y_{1+\xi_k, j_k}\right) < 0, \forall k \in [0:n+1], \xi_k \in 0:1, \xi_{k+1} = 1-\xi_k. \tag{7}$$

Тогда A^* *– единственное решение задачи (1).*

Доказательство. 1. Предположим, что решением задачи (1) является некоторый вектор A, то есть $\eta(A) \le \eta(A^*)$. Ввиду (4), имеем $d(A, t_{j_k}) \le$ $\le d(A^*, t_{j_k})$, $\forall k \in [0:n+1]$.

2. Без потери общности в рассуждениях считаем $\xi_0 = 0$. Положим $y_1 :=$ $= y_{1,j_0}$, $y_2 := y_{2,j_0}$. В таком случае

$$f\left(p_n\left(A, t_{j_0}\right)\right) = d(A, t_{j_0}) \le d(A^*, t_{j_0}) = f\left(p_n\left(A^*, t_{j_0}\right)\right).$$

По лемме 2 функция $f\left(y\right)$ убывает на полуинтервале $y \in (-\infty; y_{1,j_0}]$, причем из (9) при $k = 0$ вытекает $p_n\left(A^*, t_{j_0}\right) < y_{1,j_0}$, следовательно, неравенство $p_n\left(A, t_{j_0}\right) < p_n\left(A^*, t_{j_0}\right)$ не имеет места, значит, $p_n\left(A, t_{j_0}\right) \ge p_n\left(A^*, t_{j_0}\right)$.

3. Продолжая расуждать аналогично для $k \in [1:n+1]$, получаем

$$\left(-1\right)^k\left(p_n\left(A, t_{j_k}\right) - p_n\left(A^*, t_{j_k}\right)\right) \ge 0, \forall k \in [0:n+1].$$

Последнее возможно только при $A = A^*$. Теорема доказана.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Демьянов В.Ф., Малоземов В.Н.* Введение в минимакс. М.: Наука, 1972.

2. *Ремез Е.Я.* Основы численных методов чебышевского приближения. Киев: Наук. думка, 1969.

УДК 514.764

С.В. Галаев, А.В. Гохман

ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ ДВИЖЕНИЯ ТОЧКИ ПЕРЕМЕННОЙ МАССЫ СО СВЯЗЯМИ

В работе [1] была рассмотрена материальная точка, масса которой зависит только от её положения, в то время как абсолютные скорости отбрасываемых частиц равны нулю. Автором работы была дана геометрическая интерпретация движения такой точки. А именно было показано, что траектория точки переменной массы совпадает с геодезической проективно-евклидовой связности. В работе [2] на движение точки переменной массы были наложены связи, в результате чего траектории движения такой точки должны были касаться неголономного многообразия специального вида. Как и в работе [1], удалось найти связность, теперь уже в неголономном многообразии, геодезические которой совпадают с траекториями движения точки.

В настоящей статье мы продолжаем изучать движение точки переменной массы, но уже в случае произвольной линейной связи. Назовём точку $M(X^\alpha)$ евклидова пространства R_3 положением материальной точки $\tilde{M}$ с переменной массой $m(x^\alpha)$, где $m(x^\alpha)$ интерпретируется как положительная функция $m: \ R_3 \to R$ $(\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, 3)$.

Предположим, что на движение точки $\tilde{M}$ наложена линейная связь. Это означает, что траектория движения точки всюду касается некоторого неголономного многообразия X_3^2. Будем считать, что в пространстве R_3 задана ортонормированная система координат (x^α) и $P : T(R_3) \to X_3^2$ – проектор, определяемый связью. Векторные поля $\overline{e}_a = P(\partial_\alpha) = \partial_\alpha - \Gamma_a^3 \partial_3$ в каждой точке пространства R_3 определяют допустимый базис соответствующей площадки неголономного многообразия X_3^2 $(a, b, c = 1, 2)$. Мы полагаем, что движение точки $\tilde{M}$ подчиняется закону

$$\frac{d}{dt} m\dot{\overline{r}} = \lambda \overline{n}, \tag{1}$$

где $\overline{n} = \Gamma_1^3 \partial_1 + \Gamma_2^3 \partial_2 + \partial_3$ — нормальное векторное поле к неголономному многообразию X_3^2, λ — неопределённый множитель. В ортонормированных координатах уравнение (1) перепишется в виде

$$\begin{cases} m\ddot{x}^a + \partial_\alpha m \dot{x}^\alpha \dot{x}^a = \lambda \Gamma_a^3, \\ m\ddot{x}^3 + \partial_\alpha m \dot{x}^\alpha \dot{x}^3 = \lambda. \end{cases} \tag{2}$$