Используя уравнение связи $\dot{x}^3 = -\dot{x}^a \Gamma^3_a$, находим явное выражение для λ:

$$\lambda = \frac{-m\dot{\Gamma}^3_a \dot{x}^a}{\overline{n}^2}. \tag{3}$$

С помощью необходимых преобразований систему (2) с учётом равенства (3) приведём к эквивалентному виду

$$\ddot{x}^a + \left(\delta^a_b P_c + \delta^a_c P_b + \frac{\Gamma^3_a}{\overline{n}^2}\overline{e}_b \Gamma^3_c\right)\dot{x}^b \dot{x}^c = 0,$$

где $P_a = \frac{1}{2}\overline{e}_a \ln m$.

Пусть $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} = \delta^\alpha_\beta P_\gamma + \delta^\alpha_\gamma P_\beta$ — проективно-евклидова связность, заданная в пространстве R_3. Проецируя эту связность вдоль оснащения $\langle \partial_3 \rangle$ на X^2_3, получим связность в неголономном многообразии X^2_3, коэффициенты которой относительно базиса $\overline{e}_a$ имеют вид

$$\Gamma^a_{bc} = \delta^a_b P_c + \delta^a_c P_b + \frac{\Gamma^3_a}{\overline{n}^2}\overline{e}_b \Gamma^3_c.$$

Таким образом, нами доказана

Теорема. *Движение точки переменной массы со связями совпадает с геодезической проекции проективно-евклидовой связности на соответствующее неголономное многообразие.*

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Гохман А.В.* К геометрии динамики одного класса точек переменной массы // Дифференциальная геометрия. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1974. Вып. 1. С. 15–19.

2. *Галаев С.В., Гохман А.В.* К геометрии динамики со связями одного класса точек переменной массы // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2003. Вып. 5. С. 18–22.

УДК 517.984

А.В. Голубь, А.П. Хромов

О РАВНОСХОДИМОСТИ РАЗЛОЖЕНИЙ ПО СОБСТВЕННЫМ ФУНКЦИЯМ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ С ИНВОЛЮЦИЕЙ, ДОПУСКАЮЩЕЙ РАЗРЫВЫ

Рассмотрим оператор

$$Af(x) = \int\limits_0^{\theta(x)} A(\theta(x), t) f(t)\, dt, \tag{1}$$

где $\theta(x) = \frac{1}{2} - x$ при $x \in \left[0; \frac{1}{2}\right]$ и $\theta(x) = \frac{3}{2} - x$ при $x \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$. Функция $\theta(x)$

является инволюцией, т.е. $\theta(\theta(x)) = x$, причем $\theta(x)$ терпит разрыв первого рода при $x = \frac{1}{2}$.

Требования на ядро оператора (1): функция $A(x,t) = 0$ при $t \geq x$, $A(x, x-0) \equiv 1$ и $\frac{\partial^{k+l}}{\partial x^k \partial t^l} A(x,t)$ непрерывны при $t \leq x$ и $k + l \leq 2$.

Операторы такого вида рассматривались в [1]. В данной статье в отличие от результатов [1] получаются просто проверяемые условия, при которых имеет место равносходимость разложений по собственным и присоединенным функциям оператора (1) и в обычный тригонометрический ряд Фурье.

Обозначим $\tilde{A}(x,t) = A(\theta(x), t)$ при $t \leq \theta(x)$ и $\tilde{A}(x,t) \equiv 0$ при $t > \theta(x)$ и введем матрицу $B(x,t)$ с компонентами

$$B_{ij}(x,t) = \tilde{A}\left(\frac{i-1}{2} + x, \frac{j-1}{2} + t\right),\ (i,j = 1,2),\ x,t \in [0;1/2]\,.$$

Лемма 1. *Если $y(x) = Af(x)$, то $z(x) = Bg(x)$, $x \in [0;1/2]$, где $z(x) = (z_1(x), z_2(x))^T$ (T – знак транспонирования), $z_1(x) = y(x)$, $z_2(x) = y\left(\frac{1}{2} + x\right)$, $g(x) = (g_1(x), g_2(x))^T$, $g_1(x) = f(x)$, $g_2(x) = f\left(\frac{1}{2} + x\right)$, $Bg(x) = \int\limits_0^{1/2} B(x,t) g(t)\, dt$.*

Представим оператор $B_1 g(x) = \int\limits_0^{1/2} B_x\left(\frac{1}{2} - x, t\right) g(t)\, dt$, $B_x(x,t) = \frac{\partial}{\partial x} B(x,t)$, в виде $B_1 = W + V$, где $\|W\| < 1$, а $Vg(x) = \sum\limits_{k=1}^{m} (g, \psi_k)\varphi_k(x)$, $\{\psi_k(x)\}_1^m$, $\{\varphi_k(x)\}_1^m$ — линейно независимые системы в пространстве вектор-функций размерности 2, $(g, \psi_k) = \sum\limits_{j=1}^{2} \int\limits_0^{1/2} g_j(t)\psi_k^j(t)\, dt$.

Обозначим $(W - E)^{-1}\varphi_k(x) = \tilde{\varphi}_k(x)$, E — единичный оператор.

Лемма 2. *Оператор B^{-1} существует тогда и только тогда, когда $\operatorname{rang} M = m$, где $M = \begin{pmatrix} E + (\tilde{\varphi}, \psi)^T \\ \int\limits_0^{1/2} B(0,t)\tilde{\varphi}^T(t)\, dt \end{pmatrix}$, E — единичная матрица размерности $m \times m$, $(\tilde{\varphi}, \psi) = \{(\tilde{\varphi}_j, \psi_k)\}_{j,k=1}^m$, $\tilde{\varphi}^T = (\tilde{\varphi}_1, \ldots, \tilde{\varphi}_m)$.*

Лемма 3. *Пусть B^{-1} существует и для определенности минор Δ матрицы M, образованный из первых m строк, отличен от нуля. Тогда*

$$B^{-1}z = (W - E)^{-1} z'\Big(\frac{1}{2} - x\Big) - \frac{1}{\Delta}\sum_{j,k=1}^{m} \Delta_{jk}\tilde{\varphi}_k(x)\ \Big((W - E)^{-1} z'\Big(\frac{1}{2} - x\Big), \psi_j\Big),$$

$$\int\limits_0^{1/2} B(0,t) B^{-1} z(t)\, dt = 0,$$

где Δ_{jk} – алгебраические дополнения элементов определителя Δ.

Лемма 4. *Для оператора B^{-1} справедливо представление*

$$B^{-1}z(x) = z'\Big(\tfrac{1}{2}-x\Big) + a_1(x)z(0) + a_2 z\Big(\tfrac{1}{2}\Big) + a_3(x)z(x) +$$
$$+a_4(x)z\Big(\tfrac{1}{2}-x\Big) + \int\limits_0^{1/2} a(x,t)z(t)\,dt, \quad S\cdot z(0) + T\cdot z\Big(\tfrac{1}{2}\Big) = 0,$$

где $a_i(x)$ $(i = 1,\ldots,4)$, $a_3'(x)$, $a_4'(x)$, $a(x,t)$ — непрерывные матрицы-функции, каждая компонента матрицы $a(x,t)$ имеет тот же смысл, что и компоненты $B_x(x,t)$ с той лишь разницей, что теперь по t предполагается лишь непрерывность, $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $T = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Лемма 5.*Если $z(x) = (E-\lambda B)^{-1}Bg(x)$, а $v(x) = \Big(z^T(x), z^T\Big(\tfrac{1}{2}-x\Big)\Big)^T$, то $v(x)$ удовлетворяет интегро-дифференциальной системе*

$$\begin{gathered} Qv'(x) + \tilde{P}_1(x)v(0) + \tilde{P}_2(x)v\left(\tfrac{1}{2}\right) + \tilde{P}_3(x)v(x) + \tilde{N}v - \lambda v(x) = \tilde{m}(x), \\ \tilde{M}_0 v(0) + \tilde{M}_1 v\left(\tfrac{1}{2}\right) = 0, \end{gathered} \tag{2}$$

где $Q = \begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix}$, $\tilde{P}_1(x) = \begin{pmatrix} a_1(x) & a_2(x) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,

$\tilde{P}_2(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a_2\Big(\tfrac{1}{2}-x\Big) & a_1\Big(\tfrac{1}{2}-x\Big) \end{pmatrix}$, $\tilde{P}_3(x) = \begin{pmatrix} a_3(x) & a_4(x) \\ a_4\Big(\tfrac{1}{2}-x\Big) & a_3\Big(\tfrac{1}{2}-x\Big) \end{pmatrix}$,

$\tilde{N}v = \int\limits_0^{1/2} \tilde{N}(x,t)v(t)\,dt$, $\tilde{N}(x,t) = \begin{pmatrix} a(x,t) & 0 \\ a\Big(\tfrac{1}{2}-x,t\Big) & 0 \end{pmatrix}$,

$\tilde{M}_0 = \begin{pmatrix} S & T \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\tilde{M}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ T & S \end{pmatrix}$, $\tilde{m}(x) = \Big(g^T(x), g^T\Big(\tfrac{1}{2}-x\Big)\Big)^T$.

Лемма 6.*Если $R_\lambda = (E-\lambda A)^{-1}A$ существует, то*

$$R_\lambda f(x) = v_1(x),\ x\in\big[0,1/2\big],\ R_\lambda f(x) = v_2\big(x-1/2\big),\ x\in\big[1/2,1\big], \tag{3}$$

где $v_i(x)$ — компоненты вектора $v(x)$, удовлетворяющего системе (2). *Верно и обратное, то есть если λ таково, что однородная краевая задача для системы* (2) *имеет только нулевое решение, то R_λ существует и определяется по формуле* (3).

Лемма 7. Существует матрица-функция $H(x,\lambda) = H_0(x) + \lambda^{-1}H_1(x)$ с непрерывно дифференцируемыми компонентами матриц $H_0(x)$, $H_1(x)$, причем $H_0(x)$ невырождена при всех x и диагональна, что преобразование $v(x) = \Gamma H(x,\lambda)\mathrm{w}(x)$, где Γ — матрица, диагонализирующая матрицу Q^{-1}, т.е. $\Gamma^{-1}Q^{-1}\Gamma = D = \mathrm{diag}\,(i,-i,i,-i)$, приводит систему (2) к виду

$$\begin{gathered}
w'(x)+P_1(x,\lambda)\mathrm{w}(0)+P_2(x,\lambda)w\,(1/2)+P_3(x,\lambda)\mathrm{w}(x)+\\
+N_\lambda w-\lambda D\mathrm{w}(x)=m(x,\lambda),\\
U(w)=M_{0\lambda}\mathrm{w}(0)+M_{1\lambda}w\,(1/2)=0,
\end{gathered}\tag{4}$$

где $P_1(x,\lambda) = H^{-1}(x,\lambda)D\Gamma^{-1}\tilde{P}_1(x)\Gamma H(0,\lambda)$, $P_2(x,\lambda) = H^{-1}(x,\lambda)D\times$ $\times\Gamma^{-1}\tilde{P}_2(x)\Gamma H\left(\frac{1}{2},\lambda\right)$, $P_3(x,\lambda) = \lambda^{-1}H^{-1}(x,\lambda)[H_1'(x) + D\Gamma^{-1}\tilde{P}_3(x)\times$ $\times\Gamma H_1(x)]$, $N_\lambda = H^{-1}(x,\lambda)D\Gamma^{-1}\tilde{N}\Gamma H(x,\lambda)$, $M_{0\lambda} = \tilde{M}_0\Gamma H(0,\lambda)$, $M_{1\lambda} =$ $= \tilde{M}_1\Gamma H\left(\frac{1}{2},\lambda\right)$, $m(x,\lambda)=H^{-1}(x,\lambda)D\Gamma^{-1}\tilde{m}(x)$.

Рассмотрим краевую задачу

$$w'(x)=\lambda Dw(x)+m(x),\quad U(w)=0,\tag{5}$$

где $U(\cdot)$ — краевые условия из (4), $m(x)$ — произвольный вектор-функция с компонентами из $L\left[0,\frac{1}{2}\right]$.

Лемма 8.*Для решения задачи (5) имеет место формула*

$$w(x,\lambda)=-Y(x,\lambda)\Delta^{-1}(\lambda)\int\limits_0^{1/2}U_x(g(x,t,\lambda))m(t)\,dt+g_\lambda m(x),\tag{6}$$

где $Y(x,\lambda) = \operatorname{diag}(e^{\lambda ix},e^{-\lambda ix},e^{\lambda ix},e^{-\lambda ix})$*;* $\Delta(\lambda) = U(Y(x,\lambda))$*;* $g(x,t,\lambda) =$ $= \operatorname{diag}(g_1(x,t,\lambda),\dots,g_4(x,t,\lambda))$*;* $g_j(x,t,\lambda) = -\varepsilon(t,x)e^{\lambda i(x-t)}$ $(j = 1,3)$*;* $g_j(x,t,\lambda)=\varepsilon(x,t)e^{-\lambda i(x-t)}$ $(j=2,4)$*;* $\varepsilon(x,t)=1$ *при* $t\le x$*,* $\varepsilon(x,t)=0$ *при* $t>x$*;* $g_\lambda m(x) = \int\limits_0^{1/2} g(x,t,\lambda)m(t)\,dt$ *и* $U_x(\cdot)$ *означает, что краевое условие берется по аргументу* x*.*

Здесь и далее считаем, что $\operatorname{Re}\lambda i\ge 0$. Обозначим далее через S_δ комплексную λ-плоскость с удаленными нулями $\det\Delta(\lambda)$ вместе с круговыми окрестностями одного и того же достаточно малого радиуса δ.

Рассмотрим еще одну краевую задачу

$$u'(x)=\lambda Du(x)+m(x),\quad U_0(u)=u(0)-u\,(1/2)=0,$$

и ее решение обозначим $R_{1\lambda}m$. Для $R_{1\lambda}m$ имеет место формула (6), где $\Delta(\lambda)$ заменяется на $\Delta_0(\lambda)=U_0(Y(x,\lambda))$, а $U(\cdot)$ на $U_0(\cdot)$.

Удалим из S_δ вместе с круговыми окрестностями радиуса δ еще и собственные значения краевых задач

$$\begin{cases}u'(x)-\lambda iu(x)=0,\\ u(0)=u\,(1/2)\end{cases}\qquad\text{и}\qquad\begin{cases}u'(x)+\lambda iu(x)=0,\\ u(0)=u\,(1/2)\end{cases}$$

и получившуюся область снова обозначим через S_δ.

Лемма 9. *Если $f(x) \in L[0,1]$, то*

$$\lim_{r\to\infty} \Big\| \int\limits_{|\lambda|=r} [H(x,\lambda)\mathrm{w}(x,\lambda) - H_0(x)R_{1\lambda}(H_0^{-1}\tilde{m}(x))]\,d\lambda \Big\|_{[\varepsilon,\frac{1}{2}-\varepsilon]} = 0,$$

где $\varepsilon \in \left(0,\frac{1}{4}\right)$ и $\mathrm{w}(x,\lambda)$ — решение задачи (4), $\tilde{m}(x)$ — из (2).

Используя метод контурного интегрирования Коши – Пуанкаре резольвенты по расширяющимся контурам λ-плоскости, на основании приведенных фактов получен следующий основной результат.

Теорема. *Пусть A^{-1} существует. Тогда для любой $f(x) \in L[0,1]$ и любого $\varepsilon \in \left(0,\frac{1}{4}\right)$ имеют место соотношения*

$$\lim_{r\to\infty} \|S_r(f,x) - \sigma_r(f,x)\|_{[\varepsilon,\frac{1}{2}-\varepsilon]} = 0,$$
$$\lim_{r\to\infty} \left\|S_r(f,x) - \sigma_r\left(g,x-\tfrac{1}{2}\right)\right\|_{[\frac{1}{2}+\varepsilon,1-\varepsilon]} = 0,$$

где $g(x) = f\left(\frac{1}{2}+x\right)$, $x \in \left[0,\frac{1}{2}\right]$, $S_r(f,x)$ — частичная сумма ряда Фурье по собственным и присоединенным функциям оператора A для тех характеристичеких чисел, для которых $|\lambda_k| < r$, $\sigma_r(g,x)$ – частичная сумма ряда Фурье по системе $\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}e^{4k\pi ix}\right\}_{-\infty}^{\infty}$ функции $g(x)$ на отрезке $x \in \left[0,\frac{1}{2}\right]$ для тех k, для которых $|4k\pi| < r$.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 06-01-00003).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Хромов А.П.* Интегральные операторы с ядрами, разрывными на ломаных линиях // Мат. сб. 2006. Т. 197, вып. 11. С. 115–142.

УДК 518.9

Е.В. Гудошникова

КОНСТРУКЦИЯ ЛИНЕЙНЫХ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

В статье указывается общая конструкция линейных положительных операторов, позволяющая, во-первых, строить новые последовательности операторов, сходящиеся к тождественному, и, во-вторых, сформулировать и доказать теоремы об аппроксимации сразу для целого класса, а не для каждой из последовательностей хорошо известных операторов, которые являются частным случаем указанной конструкции.