Лемма 9. *Если $f(x) \in L[0,1]$, то*

$$\lim_{r\to\infty} \Big\| \int\limits_{|\lambda|=r} [H(x,\lambda)\mathrm{w}(x,\lambda) - H_0(x)R_{1\lambda}(H_0^{-1}\tilde{m}(x))]\, d\lambda \Big\|_{[\varepsilon,\frac{1}{2}-\varepsilon]} = 0,$$

где $\varepsilon \in \left(0,\frac{1}{4}\right)$ и $\mathrm{w}(x,\lambda)$ — решение задачи (4), $\tilde{m}(x)$ — из (2).

Используя метод контурного интегрирования Коши – Пуанкаре резольвенты по расширяющимся контурам λ-плоскости, на основании приведенных фактов получен следующий основной результат.

Теорема. *Пусть A^{-1} существует. Тогда для любой $f(x) \in L[0,1]$ и любого $\varepsilon \in \left(0,\frac{1}{4}\right)$ имеют место соотношения*

$$\lim_{r\to\infty} \|S_r(f,x) - \sigma_r(f,x)\|_{[\varepsilon,\frac{1}{2}-\varepsilon]} = 0,$$
$$\lim_{r\to\infty} \left\|S_r(f,x) - \sigma_r\left(g, x-\tfrac{1}{2}\right)\right\|_{[\frac{1}{2}+\varepsilon,1-\varepsilon]} = 0,$$

где $g(x) = f\left(\frac{1}{2}+x\right)$, $x \in \left[0,\frac{1}{2}\right]$, $S_r(f,x)$ — частичная сумма ряда Фурье по собственным и присоединенным функциям оператора A для тех характеристичеких чисел, для которых $|\lambda_k| < r$, $\sigma_r(g,x)$ – частичная сумма ряда Фурье по системе $\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}e^{4k\pi ix}\right\}_{-\infty}^{\infty}$ функции $g(x)$ на отрезке $x \in \left[0,\frac{1}{2}\right]$ для тех k, для которых $|4k\pi| < r$.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 06-01-00003).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Хромов А.П.* Интегральные операторы с ядрами, разрывными на ломаных линиях // Мат. сб. 2006. Т. 197, вып. 11. С. 115–142.

УДК 518.9

Е.В. Гудошникова

КОНСТРУКЦИЯ ЛИНЕЙНЫХ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

В статье указывается общая конструкция линейных положительных операторов, позволяющая, во-первых, строить новые последовательности операторов, сходящиеся к тождественному, и, во-вторых, сформулировать и доказать теоремы об аппроксимации сразу для целого класса, а не для каждой из последовательностей хорошо известных операторов, которые являются частным случаем указанной конструкции.

Теорема. *Пусть функции $g(x)$ и $\psi(x)$ аналитичны в круге $|z| < a$ и принимают действительные значения на $[0; a)$. Для $n, k \in \mathbb{N}$ обозначим*

$$\alpha_{0,n} = g(0)^n \alpha_{k,n} = \frac{1}{k!} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} \left[\Big(g(z)^n \Big)' \psi(z)^k \right]_{z=0}.$$

Если $\alpha_{k,n} \geq 0$ ($k = 0, 1, 2, ...$), на $[0; a)$ $g(z) > 0$, $\psi(z) > 0$, $z\psi'(z) < \psi(z)$, то функция

$$x(z) = \frac{z\psi(z)}{\psi(z) - z\psi'(z)} \cdot \frac{g'(z)}{g(z)}$$

возрастает на $[0; a)$ и последовательность операторов L_n:

$$L_n(f; x) = \frac{1}{g(z(x))^n} \sum_{k=0}^{\infty} f\Big(\frac{k}{n}\Big) \alpha_{k,n} \left[\frac{z(x)}{\psi(z(x))} \right]^k, \tag{1}$$

где $z(x)$ — функция, обратная к $x(z)$, сходится к $f(x)$, непрерывной на $x \in [x(0); x(a)]$.

(Перечисленным выше условиям удовлетворяют многие хорошо известные операторы, например, операторы Саса-Миракьяна, Баскакова, Каталана. Кроме того, несложно указать пары функций g и ψ с требуемыми свойствами и получить новые последовательности операторов.)

Доказательство. Непосредственным вычислением проверяется, что

$$S = \frac{t\psi(tz)}{\psi(tz) - tz\psi'(tz)} \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{t\psi(tz)}{\psi(tz) - tz\psi'(tz)} \frac{\partial}{\partial t} \Big[\Big(\frac{\psi(tz)}{t} \Big)^x g(tz) \Big] \right]_{t=1} =$$

$$= \frac{z\psi^{x+1}(z) g(z)}{\psi(z) - z\psi'(z)} \frac{dx}{dz}. \tag{2}$$

С другой стороны, применяя теорему Лагранжа [1], в силу которой имеет место представление

$$g(tz) = g(0) + \sum_{k=1}^{\infty} \Big(\frac{tz}{\psi(tz)} \Big)^k \alpha_{k,1},$$

получаем, что

$$S = x^2 \psi(z)^x g(0) + \psi(z)^x \sum_{k=1}^{\infty} \Big(\frac{z}{\psi(z)} \Big)^k (k - x)^2 \alpha_{k,1} > 0. \tag{3}$$

Сравнивая полученные результаты (2) и (3), заключаем, что $\dfrac{dx}{dz} > 0$, следовательно, $x(z)$ возрастает и имеет обратную функцию $z(x)$.

Дифференцируя (1), получим соотношение

$$\frac{d}{dx}L_n(f;x) = \frac{z'(x)g'(z)n}{xg(z)}L_n((t-x)f;x). \tag{4}$$

По теореме Лагранжа имеет место представление $g(z)^n = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z}{\psi(z)}\right)^k \alpha_{k,n}$, откуда следует, что

$$L_n(1;x) = 1. \tag{5}$$

Из (4) следует, что

$$\frac{d}{dx}L_n(1;x) = \frac{z'(x)g'(z)n}{xg(z)}L_n(t-x;x)$$

и с учетом (5) имеем

$$L_n(t-x;x) = 0 \implies L_n(t;x) = xL_n(1;x) = x. \tag{6}$$

Аналогично находится, что

$$L_n(t^2;x) = x^2 + \frac{x}{n}\frac{g(z)}{z'(x)g'(z)}. \tag{7}$$

Из соотношений (5), (6) и (7) следует, что L_n удовлетворяет теореме Коровкина [2] и, значит, $L_n(f;x) \to f(x)$, непрерывной на $[x(0);x(a)]$.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект №07-01-00167).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Уиттекер Э.Т., Ватсон Дж.Н.* Курс современного анализа: В 2 т. М., 1962. Т. 1.

2. *Дзядык В.К.* Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. М., 1977.

УДК 517.518.82 + 519.853.3

С.И. Дудов

О ДВУХ ВСПОМОГАТЕЛЬНЫХ ФАКТАХ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ ЗАДАЧ ПОЛИНОМИАЛЬНОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ

Известно, что методы выпуклого анализа могут успешно применяться для исследования задач приближения функций и многозначных отображений [1,2]. В данной статье приведем обобщение одного вспомогательного факта из [1], которое может быть использовано при исследовании задач полиномиальной аппроксимации сегментных функций (например, задач, рассматриваемых в [3,4] с помощью средств выпуклого анализа.