Дифференцируя (1), получим соотношение

$$\frac{d}{dx}L_n(f;x) = \frac{z'(x)g'(z)n}{xg(z)}L_n((t-x)f;x). \tag{4}$$

По теореме Лагранжа имеет место представление $g(z)^n = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z}{\psi(z)}\right)^k \alpha_{k,n}$, откуда следует, что

$$L_n(1;x) = 1. \tag{5}$$

Из (4) следует, что

$$\frac{d}{dx}L_n(1;x) = \frac{z'(x)g'(z)n}{xg(z)}L_n(t-x;x)$$

и с учетом (5) имеем

$$L_n(t-x;x) = 0 \implies L_n(t;x) = xL_n(1;x) = x. \tag{6}$$

Аналогично находится, что

$$L_n(t^2;x) = x^2 + \frac{x}{n}\frac{g(z)}{z'(x)g'(z)}. \tag{7}$$

Из соотношений (5), (6) и (7) следует, что L_n удовлетворяет теореме Коровкина [2] и, значит, $L_n(f;x) \to f(x)$, непрерывной на $[x(0);x(a)]$.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект №07-01-00167).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Уиттекер Э.Т., Ватсон Дж.Н.* Курс современного анализа: В 2 т. М., 1962. Т. 1.

2. *Дзядык В.К.* Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. М., 1977.

УДК 517.518.82 + 519.853.3

С.И. Дудов

О ДВУХ ВСПОМОГАТЕЛЬНЫХ ФАКТАХ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ ЗАДАЧ ПОЛИНОМИАЛЬНОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ

Известно, что методы выпуклого анализа могут успешно применяться для исследования задач приближения функций и многозначных отображений [1,2]. В данной статье приведем обобщение одного вспомогательного факта из [1], которое может быть использовано при исследовании задач полиномиальной аппроксимации сегментных функций (например, задач, рассматриваемых в [3,4] с помощью средств выпуклого анализа.

Пусть T – некоторое множество на действительной оси $\mathbb{R}$, на котором определено многозначное отображение $\xi(\cdot)\ :\ \ T \Rightarrow 2^{\mathbb{R}}$, образами которого являются некоторые подмножества $\xi(t)$ из $\mathbb{R}$ для $t \in T$. Далее понимаем под coB и $intB$ соответственно выпуклую оболочку и внутренность множества B, $0_{n+1} = (0, 0, .., 0) \in \mathbb{R}^{n+1}$.

Теорема 1. *Для того чтобы*

$$0_{n+1} \in co\,\{\xi(t)(1, t, t^2, \ldots, t^n) : t \in T\} \tag{1}$$

необходимо и достаточно, чтобы выполнялось хотя бы одно из условий:

1. *существует точка $t_0 \in T$ такая, что $0 \in co\,\xi(t_0)$,*

2. *существует селектор $f(t) \in \xi(t), t \in T$ и набор упорядоченных чисел*

$$\{t_i\}_{i=\overline{0,n+1}} \subset T : t_0 < t_1 < ... < t_{n+1}$$

таких, что $f(t_i) \neq 0$ и $\mathrm{sgn} f(t_i) = -\mathrm{sgn} f(t_{i+1}), i = \overline{0, n+1}$.

Доказательство придерживается схемы доказательства леммы 8.1 из [1, с. 292], обобщением которой данная теорема является.

Необходимость. Пусть выполняется соотношение (1) и при этом при всех $t \in T$ $0 \neq co\,\xi(t)$. Очевидно, без потери общности можно считать, что все образы $\xi(t)$ – выпуклы. Из (1), по теореме Каратеодори [2, с. 9], следует, что элемент 0_{n+1} представим в виде выпуклой комбинации $n + 2$ элементов из множества $\{\xi(t)(1, t, .., t^n)\ :\ \ t \in T\}$. Ввиду выпуклости образов можно считать, что эти элементы соответствуют различным значениям $t \in T$. Таким образом, найдется упорядоченный набор точек $\{t_i\}_{i=\overline{0,n+1}} \subset T$, соответствующий набор значений $f(t_i) \in \xi(t_i)$ и чисел

$$\{\alpha_i\}_{i=\overline{0,n+1}}:\ \alpha_i \geq 0, \sum_{i=0}^{n+1} \alpha_i = 1$$

таких, что

$$\sum_{i=0}^{n+1} \alpha_i f(t_i)(1, t_i, .., t_i^n) = 0_{n+1}. \tag{2}$$

Покажем, что все $\alpha_i > 0, i = \overline{0, n+1}$. Действительно, предположим без потери общности, что $\alpha_{n+1} = 0$. Тогда соотношение (2) можно переписать в виде

$$\sum_{i=0}^{n+1} \alpha_i f(t_i) t_i^k = 0,\ k = \overline{0, n}.$$

Отсюда вытекает, что для любого полинома $P_n(A,t) = a_0 + a_1 t + .. + a_n t^n$ с набором коэффициентов $A = (a_0, a_1, .., a_n)$ выполняется

$$\sum_{i=0}^{n} \alpha_i f(t_i) P_n(A, t_i) = 0. \tag{3}$$

В частности, равенство (3) будет выполняться и для полинома $P_n(A_0, t)$, однозначно определяемого системой

$$P_n(A_0, t_i) = \alpha_i / f(t_i),\ i = \overline{0, n}. \tag{4}$$

Подставляя значения полинома (4) в (3), получим

$$\sum_{i=0}^{n} \alpha_i^2 = 0.$$

Это противоречит равенству

$$\sum_{i=0}^{n} \alpha_i = 1.$$

Итак, все $\alpha_i > 0, i = \overline{0, n+1}$.

Соотношение (2) можно переписать в виде

$$\sum_{i=0}^{n} \alpha_i f(t_i)(1, t_i, .., t_i^n) = -\alpha_{n+1} f(t_{n+1})(1, t_{n+1}, .., t_{n+1}^n).$$

Отсюда, по формуле Крамера имеем

$$\alpha_i f(t_i) = -\alpha_{n+1} f(t_{n+1}) \frac{V(t_0, .., t_{i-1}, t_{n+1}, t_{i+1}, ..t_n)}{V(t_0, .., t_n)},$$

где $V(t_0, .., t_n)$ – определитель Вандермонда. Учитывая, что

$$V(t_0, .., t_{i-1}, t_{n+1}, t_{i+1}, .., t_n) = (-1)^{n-i} V(t_0, .., t_{i-1}, t_{i+1}, .., t_{n+1}),$$

получаем

$$\alpha_i f(t_i) = -(-1)^{n-i} \alpha_{n+1} f(t_{n+1}) \frac{V(t_0, .., t_{i-1}, t_{i+1}, .., t_{n+1})}{V(t_0, .., t_n)}. \tag{5}$$

Поскольку числа t_i упорядочены по возрастанию, то определители в (5) являются положительными [1, с. 16].

Теперь, учитывая положительность всех $\alpha_i,\ i = \overline{0, n+1}$, из (5) заключаем

$$\mathrm{sgn} f(t_i) = -\mathrm{sgn} f(t_{i+1}),\ i = \overline{0, n}.$$

Достаточность. Пусть набору упорядоченных точек $\{t_i\}_{i=\overline{0,n+1}}$ соответствуют знакоочередные значения $f(t_i) \in \xi(t_i)_{i=\overline{0,n+1}}$. Известно [1, с. 299], что данному набору точек можно сопоставить набор чисел

$$\{\alpha_i\}_{i=\overline{0,n+1}}:\ \alpha_i > 0, \sum_{i=0}^{n+1} \alpha_i = 1$$

таких, что для любого полинома $P_n(A,t)$ выполняется

$$\sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i \alpha_i P_n(A, t_i) = 0. \tag{6}$$

Отсюда, придавая соответствующие значения набору коэффициентов A, получаем

$$\sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i \alpha_i (1, t_i, .., t_i^{n+1}) = 0_{n+1}. \tag{7}$$

Учитывая знакоочередность значений $f(t_i)$, соотношение (7) можно переписать в виде

$$\sum_{i=0}^{n+1} \beta_i f(t_i)(1, t_i, .., t_i^{n+1}) = 0_{n+1}, \tag{8}$$

где $\beta_i = \alpha_i / |f(t_i)| > 0,\ i = \overline{0, n+1}$. Из (8), очевидно, вытекает (1). Теорема доказана.

Учитывая знакоочередность значений $\{f(t_i)\}, i = \overline{0, n+1}$, нетрудно видеть, что система (8) с добавлением условия нормировки $\beta_0 + \beta_1 + .. + \beta_{n+1} = 1$ будет иметь единственное решение относительно $\{\beta_i\}_{i=\overline{0,n+1}}$ и при этом $\beta_i > 0,\ i = \overline{0, n+1}$. Это означает, что справедлива

Теорема 2. *Если функция $f(t)$ принимает на упорядоченном наборе точек: $t_0 < t_1 < \ldots < t_{n+1}$ знакоочередные значения:* $\mathrm{sgn} f(t_i) = -\mathrm{sgn} f(t_{i+1})$, $i = \overline{0, n}$, *то*

$$0_{n+1} \in int\, co\{f(t)(1, t_i, \ldots, t_i^n) :\ i = \overline{0, n+1}\}.$$

Замечание. Получение необходимых и достаточных условий решения в задаче П.Л. Чебышева о наилучшем приближении непрерывной функции полиномом [1,2] или в задачах об оценке или приближению сегментной функции полиномиальной полосой, рассматриваемых в [3] и [4], можно свести к использованию теоремы 1, где множества T и $\xi(t)$ принимают конкретный вид. Теорема 2 в этих случаях помогает получать условия единственности решения.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 06-01-00003).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Демьянов В.Ф., Малоземов В.Н.* Введение в минимакс. М.: Наука, 1972.
2. *Пшеничный Б.Н.* Выпуклый анализ и экстремальные задачи. М.: Наука, 1980.
3. *Выгодчикова И.Ю.* О наилучшем приближении непрерывного многозначного отображения алгебраическим полиномом // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2000. Вып. 2. С. 13–15.
4. *Сорина Е.В.* Критерий решения задачи наилучшего приближения многозначного отображения полиномиальной полосой фиксированной ширины // Математика. Механика: Сб. науч.тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2006. Вып. 8. С. 127–130.

УДК 519.853.3

А.С. Дудова

ОБ ОДНОМ СВОЙСТВЕ СИЛЬНО КВАЗИВЫПУКЛОЙ НОРМЫ

Пусть функция $n(x)$ удовлетворяет на конечномерном пространстве $\mathbb{R}^p$ аксиомам нормы.

Определение 1. *Будем говорить, что норма $n(x)$ является r-сильно квазивыпуклой, если ее шар единичного радиуса является r-сильно выпуклым множеством, то есть представимым в виде пересечения евклидовых шаров радиуса r [1, с. 289].*

В силу положительной однородности любая норма не может быть строго или тем более сильно выпуклой функцией на любом выпуклом телесном множестве. Цель данной статьи – показать, что на некоторых отрезках сильно квазивыпуклая норма может вести себя как сильно выпуклая функция.

Далее используются обозначения:

$\|x\|$ – евклидова норма элемента $x \in \mathbb{R}^p$; $0_p = (0, 0, .., 0) \in \mathbb{R}^p$;

$B(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^p : \|x - y\| \leq r\}, B_n(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^p : n(x - y) \leq r\}$ – шары в евклидовой норме и норме $n(x)$ соответсвенно с центром в точке x и радиуса r;

$str\, co_r\, A$ – r-сильно выпуклая оболочка множества A, то есть наименьшее по включению r-сильно выпуклое множество, содержащее A [1, с. 297].

Напомним, что все нормы в конечномерном пространстве являются эквивалентыми. Поэтому для нашей конкретной нормы найдется положительная константа C такая, что

$$C\|x\| \leq n(x), \ \forall x \in \mathbb{R}^p. \tag{1}$$