2. *оператор* $E - H_k(x)$ *имеет ограниченный обратный;*

3. *функция* $\psi_k(x,\cdot) \in L_2(\gamma_\tau)$ *и является (единственным в* $L_2(\gamma_\tau)$*) решением уравнения*

$$\psi_k(x) = H_k(x)\psi_k(x) + g_k(x).$$

Основное уравнение, содержащееся в пункте 3 теоремы 1, является ключевым звеном конструктивной процедуры решения обратной задачи: по его решению может быть построен искомый потенциал [2].

Замечание. Фактически задание функции Вейля $M_k(\lambda)$ позволяет определить потенциал на «своем» ребре e_k. Для простоты изложения мы считаем заданными все функции Вейля $M_k(\lambda), k = \overline{1,p}$, что позволяет свести задачу 1 к решению таких «локальных» задач. В действительности такая постановка задачи является переопределенной: для однозначного восстановления потенциала достаточно знать, например, $M_k(\lambda), k = \overline{1,p-1}$. При этом непосредственно восстанавливаются $q_k(x), k = \overline{1,p-1}$, а затем, используя описанную в [2] процедуру пересчета, ставится и решается обратная задача для ребра e_p.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ и ННС (проекты 07-01-00003 и 07-01-92000-ННС-а).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Hryniv R.O., Mykytyuk Ya.V.* Inverse spectral problems for Sturm – Liouville operators with singular potentials // Inverse Problems. 2003. Vol. 19. P. 665–683.

2. *Юрко В.А.* Введение в теорию обратных спектральных задач. М.: Физматлит, 2007.

УДК 519.853

А.Б. Коноплев

О СВЕДЕНИИ ЗАДАЧИ ПРИБЛИЖЕНИЯ АФФИННОГО МНОГОЗНАЧНОГО ОТОБРАЖЕНИЯ ПОСТОЯННЫМИ МНОГОЗНАЧНЫМИ ОТОБРАЖЕНИЯМИ С ШАРОВЫМИ ОБРАЗАМИ К ЗАДАЧЕ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

В работе [1] рассматривалась задача о равномерном в метрике Хаусдорфа приближении аффинного многозначного отображения (м.о.) постоянными м.о. с образами виде шара некоторой нормы. Здесь будет рассмотрен случай ее сведения к задаче линейного программирования.

Пусть на отрезке $[0,1]$ задано аффинное м.о. $F(\cdot)$ следующего вида:

$$F(t) = (1-t)A + tB, \tag{1}$$

где $t \in [0,1]$, а A, B – выпуклые компакты из $\mathbb{R}^p$. Будем предполагать также, что $B \subset A$.

Пусть $n(x)$ – некоторая норма на $\mathbb{R}^p$, $n^*(x) = \max\limits_{n(v)\leq 1} < v, x >$ — полярная к ней норма, $Bn(x,r) = \{y \in \mathbb{R}^p : \ n(x-y) \leq r\}$ — шар в норме $n(x)$ с центром в точке x и радиусом r. Обозначим через $h\big(A,B\big)$ расстояние Хаусдорфа между множествами A и B из $\mathbb{R}^p$ в норме $n(\cdot)$.

Рассмотрим задачу

$$\varphi(x,r) \equiv \max_{t\in[0,1]} h\big(F(t), Bn(x,r)\big) \to \min_{x\in\mathbb{R}^p,\, r\geq 0} \tag{2}$$

наилучшего равномерного на отрезке $[0,1]$ приближения м.о. $F(\cdot)$ постоянными м.о. с образами в виде шаров $Bn(x,r)$.

Для выпуклого компакта $A \subset \mathbb{R}^p$ и множества $\Omega_A = \overline{\mathbb{R}^p \backslash A}$ определим функции

$$R(x,A) = \max_{y\in A} n(x-y), \quad \rho(x,A) = \min_{y\in A} n(x-y),$$
$$P(x,A) = \rho(x,A) - \rho(x,\Omega_A).$$

Отметим, что они являются выпуклыми, конечными на $\mathbb{R}^p$ и липшицевыми с константой 1 относительно нормы $n(\cdot)$ [2,3]. Множество точек проекции точки x на множество A определяется соотношением $Q^\rho(x,A) = \{y \in \in A : n(x-y) = \rho(x,A)\}$.

В работе [1] показано, что для м.о. вида (1) задача (2) эквивалентна следующей задаче выпуклого программирования

$$\Phi(x) = R(x,A) + P(x,B) \to \min_{x\in\mathbb{R}^p}. \tag{3}$$

Множество ее решений обозначим через $X(A,B)$.

Теорема 1. *Справедливо следующее соотношение:*

$$X(A,B) \cap B \neq \varnothing.$$

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай, когда найдется хотя бы одна точка x_0 такая, что $x_0 \in X(A,B)$, $x_0 \notin B$ и показать, что проекция этой точки на множество B тоже будет решением задачи.

Итак, пусть $x_0 \in X(A,B)$, $x_0 \notin B$. Возьмем любую точку $z_0 \in Q^\rho(x_0,B)$. Тогда $P(x_0,B) = \rho(x_0,B) = n(x_0 - z_0)$, $P(z_0,B) = 0$ и, следовательно,

$R(x_0,A)+n(x_0-z_0)=R(x_0,A)+P(x_0,B)=\Phi(x_0)\le\Phi(z_0)=R(z_0,A)$. С другой стороны, в силу липшицевости функции $R(x,A)$ выполняется неравенство $R(z_0,A)-R(x_0,A)\le n(x_0-z_0)$. Отсюда получаем $R(z_0,A)-R(x_0,A)=$ $=n(x_0-z_0)$, а тогда $\Phi(x_0)=\Phi(z_0)$, то есть $z_0\in X(A,B)$. Теорема доказана.

Из этой теоремы следует, что для получения хотя бы одного решения задачи (3) достаточно найти минимум функции $\Phi(x)$ на компакте B. Эта задача с учетом того, что для $x\in B$ функция $P(x,B)=-\rho(x,\Omega_B)$, сводится к следующей задаче:

$$\Phi(x)=R(x,A)-\rho(x,\Omega_B)\to\min_{x\in B}. \tag{4}$$

Предположим, что компакт B является многогранником, заданным в виде

$$B=\{y\in\mathbb{R}^p :< B_i,y> +b_i\ge 0,\quad i=\overline{1,m}\}, \tag{5}$$

где $B_i\in\mathbb{R}^p$, $b_i\in\mathbb{R}^1$, $i=\overline{1,m}$.

Пусть единичный шар в норме $n(\cdot)$ также является многогранником следующего вида:

$$Bn(0_p,1)=\{y\in\mathbb{R}^p :< C_j,y> +c_j\ge 0,\quad j=\overline{1,l}\}, \tag{6}$$

где $C_j\in\mathbb{R}^p$, $c_j\in\mathbb{R}^1$, $c_j>0$, $j=\overline{1,l}$.

В работе [4] получены формулы, конкретизирующие вид функций $R(x,A)$ и $\rho(x,\Omega_B)$ для рассматриваемого случая.

$$R(x,A)=\max_{j=\overline{1,l}}\{<\bar C_j,x>+\bar c_j\},\quad \rho(x,\Omega_B)=\min_{i=\overline{1,m}}\{<\bar B_i,x>+\bar b_i\}, \tag{7}$$

где $\bar C_j=-C_j/c_j$, $\bar c_j=\max\limits_{y\in -A}<\bar C_j,y>$, $\bar B_i=B_i/n^*(B_i)$, $\bar b_i=b_i/n^*(B_i)$.

Проводя рассуждения, аналогичные рассуждениям из [5], докажем, что справедлива следующая

Теорема 2. *Если B и $Bn(0_p,1)$ заданы в виде* (5), (6) *соответственно, то задача* (4) *эквивалентна задаче линейного программирования следующего вида:*

$$\begin{cases} z=x^{(p+1)}\to\min,\\ x^{(p+1)}-<\bar C_j-\bar B_i,x>-\bar c_j+\bar b_i\ge 0,\ i=\overline{1,m}, j=\overline{1,l},\\ x\in B.\end{cases} \tag{8}$$

При этом, если пара (x^*,z^*) – решение задачи (8), *то x^* – решение задачи* (4). *И наоборот, если x^* – решение задачи* (4), *то пара (x^*,z^*), где $z^*=$ $=R(x^*,A)-\rho(x^*,\Omega_B)$ является решением задачи* (8).

Доказательство. Заметим, что задачу (4) с учетом (7) можно записать в виде
$$\max_{i=\overline{1,m},j=\overline{1,l}} \{< \bar{C}_j - \bar{B}_i, x > + \bar{c}_j - \bar{b}_i\} \to \min_{x\in B}. \tag{9}$$
Пусть пара $(x^*, x^{*(p+1)})$ является решением задачи (8), тогда
$$z^* = x^{*(p+1)} = \max_{i=\overline{1,m},j=\overline{1,l}} \{< \bar{C}_j - \bar{B}_i, x^* > + \bar{c}_j - \bar{b}_i\} \geq$$
$$\geq \min_{x\in B} \max_{i=\overline{1,m},j=\overline{1,l}} \{< \bar{C}_j - \bar{B}_i, x > + \bar{c}_j - \bar{b}_i\} = L. \tag{10}$$
С другой стороны, для точки x' – решения задачи (9) выполняются неравенства $< \bar{C}_j - \bar{B}_i, x' > + \bar{c}_j - \bar{b}_i \leq L$, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,l}$, то есть пара (x', L) удовлетворяет условиям (8). Следовательно, z^* как наименьшее значение $x^{(p+1)}$, при котором выполняется (8), удовлетворяет неравенству $z^* \leq L$. С учетом неравенства (10) имеем $z^* = L$. Теперь отсюда и из (10) получаем, что x^* — решение задачи (4).

Пусть теперь x' – решение задачи (9). Тогда
$$\max_{i=\overline{1,m},j=\overline{1,l}} \{< \bar{C}_j - \bar{B}_i, x' > + \bar{c}_j - \bar{b}_i\} =$$
$$= \min_{x\in B} \max_{i=\overline{1,m},j=\overline{1,l}} \{< \bar{C}_j - \bar{B}_i, x > + \bar{c}_j - \bar{b}_i\} = L.$$
Тогда получаем, что
$$L \geq \max_{i=\overline{1,m},j=\overline{1,l}} \{< \bar{C}_j - \bar{B}_i, x' > + \bar{c}_j - \bar{b}_i\},$$
то есть пара (x', L) удовлетворяет условиям (8). Поэтому для z^* – минимального значения $x^{(p+1)}$, при котором выполняется (8), имеем $z^* \leq L$. С другой стороны, выполняется условие (10). И следовательно, $z^* = L$, то есть пара (x', L) — решение задачи (8). Поскольку L — это минимальное значение целевой функции в задаче (9), то $L = z^* = R(x^*, A) - \rho(x^*, \Omega_B)$. Теорема доказана.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Дудов С.И., Коноплев А.Б.* О приближении непрерывного многозначного отображения постоянным многозначным отображением с шаровыми образами // Математика. Механика. Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2006. Вып. 8. С. 41–43.

2. *Пшеничный Б.Н.* Выпуклый анализ и экстремальные задачи. М.: Наука, 1980.

3. *Дудов С.И.* Субдифференцируемость и супердифференцируемость функции расстояния // Мат. заметки. 1997. Т. 61, вып. 4. С. 530–542.

4. *Дудов С.И., Златорунская И.В.* О приближенной равномерной оценке выпуклого компакта шаром произвольной нормы // ЖВМиМФ. 2005. Т. 45, № 3. С. 416–428.

5. *Зуховицкий С.И., Авдеева Л.И.* Линейное и выпуклое программирование. М.: Наука, 1964.