УДК 517.984.52

В.В. Корнев

О СХОДИМОСТИ РАЗЛОЖЕНИЙ ПО СОБСТВЕННЫМ ФУНКЦИЯМ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ С ЯДРАМИ, ИМЕЮЩИМИ РАЗРЫВЫ ПРОИЗВОДНЫХ НА ДИАГОНАЛЯХ

Рассмотрим интегральный оператор

$$Af(x) = \int_0^{1-x} A(1-x,t)f(t)\,dt + \alpha\int_0^{x} A(x,t)f(t)\,dt, \tag{1}$$

где $A(x,t)$ n раз непрерывно дифференцируема по x и один раз по t при $0 \le t \le x \le 1$, $\frac{\partial^s}{\partial x^s}A(x,t)|_{t=x} = \delta_{s,n-1}$ $(s = 0,1,\dots,n)$, $\delta_{s,n-1}$ — символ Кронекера, α — произвольное число, $\alpha^2 \ne 1$.

Для оператора (1) в [1] установлена равносходимость разложений произвольной суммируемой функции по собственным и присоединенным функциям (с.п.ф.) в сравнении с тригонометрическими рядами Фурье, а в [2] для этих разложений доказан аналог теоремы Саса об абсолютной сходимости тригонометрических рядов Фурье. Следующую теорему можно рассматривать как аналог известного признака Жордана – Дирихле сходимости тригонометрических рядов Фурье.

Теорема. *Пусть* $\arg\frac{\alpha-1}{\alpha+1} \ne 0$ *и* m *— одно из чисел* $0,1,\dots,n-1$. *Тогда для любой* $f(x) \in C^m[0,1]$, *у которой* $f^{(m)}(x)$ *имеет на* $[0,1]$ *ограниченную вариацию и которая удовлетворяет условиям* $f^{(k)}(1) = (-1)^k\alpha f^{(k)}(0)$ $(k = 0,1,\dots,m)$, *выполняется соотношение*

$$\lim_{r\to\infty}\|f(x) - S_r(f,x)\|_{C^m[0,1]} = 0,$$

где $S_r(f,x)$ *— частичная сумма ряда Фурье функции* f *по с.п.ф. оператора* A, *соответствующим характеристическим значениям, модули которых не превосходят* r.

Доказательство. Изложим основные моменты доказательства. Введем в рассмотрение простейший оператор A_0 вида (1), для которого $A(x,t)$ есть

$$A_0(x,t) = \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!},$$

и его резольвенту Фредгольма $R_{0,\lambda} = (E - \lambda A_0)^{-1}A_0$, где E — единичный оператор, λ — спектральный параметр. В работе [2] получены формулы для $R_{0,\lambda}$ в удобной для нашей задачи форме.

При достаточно больших $|\lambda|$ для резольвенты $R_\lambda = (E - \lambda A)^{-1} A$ справедлива формула

$$R_\lambda = R_{0,\lambda} + \frac{1}{1-\alpha^2} R_{0,\lambda} T'_t \left(E - \frac{1}{1-\alpha^2} D^{n-1}(S - \alpha E) R_{0,\lambda} T'_t \right)^{-1} \times \\ \times D^{n-1}(S-\alpha E) R_{0,\lambda}, \qquad (2)$$

где $D = d/dx$, $Sf(x) = f(1-x)$, $T'_t f(x) = \int\limits_0^x \frac{\partial}{\partial t} T(x,t) f(t) dt$, $Tf(x) = \int\limits_0^x T(x,t) f(t)\, dt$, $T = (E + T_1)^{-1} - E$, $T_1 f(x) = \int\limits_0^x \frac{\partial^n}{\partial x^n} A(x,t) f(t) dt$.

Исходя из формул для $R_{0,\lambda}$ можно показать, что если $f(x) \in C^m[0,1]$, $f(0) = f(1) = 0$ и $\overset{1}{\underset{0}{V}} f^{(m)} < \infty$, то при $r \to \infty$ справедливы оценки

$$\Big\| \int\limits_{|\lambda|=r} \Big| \frac{d^s}{dx^s} R_{0,\lambda} f(x) \Big| \, |d\lambda| \Big\|_{C[0,1]} = |\rho|^{q_s} O\big(\|f\|_{C^m[0,1]} \big), \qquad (3)$$

где $q_s = \begin{cases} 0, & 0 \le s \le m, \\ s - m, & m+1 \le s \le n-1. \end{cases}$

Пусть теперь $f(x)$ – произвольная функция из $C^m[0,1]$, удовлетворяющая условиям теоремы. Тогда существует последовательность $\{f_k(x)\}_{k=1}^\infty \subset C^n[0,1]$, сходящаяся к $f(x)$ по норме пространства $C^m[0,1]$, такая, что $f_k^{(s)}(1) = (-1)^s \alpha f_k^{(s)}(0)$ при $s = 0, 1, \ldots, n-1$, и $f_k^{(s)}(0) = f^{(s)}(0)$, $f_k^{(s)}(1) = f^{(s)}(1)$ при $0 \le s \le m$ $(k = 1, 2, \ldots)$.

Представим остаточный член в следующем виде:

$$f(x) - S_r(f,x) = [f(x) - f_k(x)] + \Big[f_k(x) + \tfrac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\lambda|=r} R_\lambda f_k(x) d\lambda \Big] + \\ + \tfrac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\lambda|=r} R_\lambda (f - f_k) d\lambda. \qquad (4)$$

Взяв произвольное число μ, не являющееся характеристическим значением оператора A, и положив $g_k(x) = A^{-1} f_k - \mu f_k(x)$, представим выражение во второй квадратной скобке в виде

$$f_k(x) + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\lambda|=r} R_\lambda f_k(x) d\lambda = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\lambda|=r} \frac{R_\lambda g_k(x)}{\lambda - \mu} d\lambda. \qquad (5)$$

Используя формулы (2), (3), (5) и учитывая непрерывность $g_k(x)$, можно показать, что

$$\lim_{r\to\infty} \Big\| f_k(x) + \tfrac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\lambda|=r} R_\lambda f_k(x)\, d\lambda \Big\|_{C^m[0,1]} = \\ = \lim_{r\to\infty} \Big\| \int\limits_{|\lambda|=r} R_\lambda (f - f_k)\, d\lambda \Big\|_{C^m[0,1]} = 0. \qquad (6)$$

Из (6) и (4) следует утверждение теоремы. Теорема доказана.

Замечание. Условия $f^{(k)}(1) = (-1)^k \alpha f^{(k)}(0)$ $(k = 0, 1, \ldots, m)$ необходимы, так как этим условиям удовлетворяют с.п.ф. оператора A.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Корнев В.В., Хромов А.П.* О равносходимости разложений по собственнным функциям интегральных операторов с ядрами, допускающими разрывы производных на диагоналях// Мат. сб. 2001. Т. 192, № 10. С. 33–50.

2. *Корнев В. В.* Абсолютная и равномерная сходимость разложений по собственным функциям интегральных операторов с ядрами, допускающими разрывы производных на диагоналях// Мат. заметки. 2007. Т. 81, вып. 5. С. 713–723.

УДК 518.9

И.А. Кузнецова

ИЕРАРХИЧЕСКИЕ ИГРЫ ТРЕХ ЛИЦ С КОАЛИЦИЯМИ

Теория иерархических игр берет свое начало с работы [1]. Основная особенность иерархической игры состоит в том, что первый (управляющий) игрок обладает правом первого хода, он первым выбирает свою стратегию (часто в виде функции от действий других игроков) и сообщает ее остальным, после чего происходит выбор стратегий управляемыми игроками. Теория иерархических игр двух лиц достаточно развита [2, 3], чего нельзя сказать об играх трех и более лиц.

В настоящей статье предполагается, что первый игрок обладает широкими возможностями по организации обмена информацией между остальными игроками и их способа взаимодействия. В результате действий первого игрока фактически возникает игра второго и третьего игроков. В этой игре игроки 2 и 3, выбирая свои стратегии одновременно, могут вступить в коалицию, поведение в которой существенно зависит от характеристик данной игры и тем самым от действий первого игрока. Предполагается, что первый игрок знает, что второй и третий игроки совместно выбирают свои стратегии таким образом, чтобы образовавшийся исход давал каждому из них не менее того, что тот может обеспечить себе самостоятельно и был неулучшаем для обоих игроков на множестве таких исходов. Для упрощения изложения будем считать, что множества стратегий игроков конечны.

Пусть дана исходная игра $\Gamma = (X, Y, Z, F, G, H)$ с конечными множествами выборов игроков X, Y, Z и их функциями выигрыша F, G, H. Первый игрок может организовывать любые правила взаимодействия второго и третьего игроков. Формально это означает, что он может построить любую игру игроков 2 и 3 $\overline{\Gamma} = (\overline{Y}, \overline{Z}, \overline{G}, \overline{H}, \pi)$, где π — отображение $\overline{Y} \times \overline{Z}$ в $X \times Y \times Z$, обладающее свойствами

$$\forall\, y \in Y \quad \exists\, \overline{y} \in \overline{Y} \quad \forall\, \overline{z} \in \overline{Z} \quad pr_2 \pi(\overline{y}, \overline{z}) = y,$$
$$\forall\, z \in Z \quad \exists\, \overline{z} \in \overline{Z} \quad \forall\, \overline{y} \in \overline{Y} \quad pr_3 \pi(\overline{y}, \overline{z}) = z,$$