УДК 517.984

Ю.В. Курышова

ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ УЗЛОВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

В статье доказывается единственность восстановления потенциала $q \in \mathbf{L}_2(0,\pi)$ интегродифференциального оператора $L(q,M)$, заданного выражением

$$\ell y \equiv -y'' + q(x)y + \int\limits_0^x M(x,t)y(t)dt, \quad x \in [0,\pi],$$

и краевыми условиями

$$y(0) = y(\pi) = 0,$$

по так называемым *узлам* — нулям собственных функций (СФ). Суммируемая функция $M(x,t)$ полагается известной.

Узлы как спектральные данные (СД) появились впервые в работе Джойс Маклахлин [1], где доказывалась единственность восстановления классического оператора Штурма – Лиувилля по узлам. С тех пор вышла целая серия работ разных авторов, где по узлам восстанавливались различные виды дифференциальных операторов (см. литературу в [2, 3]). Для указанного интегродифференциального оператора обратная узловая задача рассматривается впервые. Следует отметить, что даже если брать в качестве СД не все узлы, а их подмножество, например, по одному узлу от каждой СФ, то обратная задача будет переопределена (это есть следствие того, что узлы несут в себе больше информации о задаче, чем, например, данные Борга или Левинсона). Но постановка обратных задач по узлам может способствовать развитию теории для некоторых классов операторов, в частности, для интегродифференциальных операторов.

Как отмечено в [4], прямая задача для оператора $L(q,M)$ исследуется аналогично $L(q,0)$. Приведем из [4] необходимые сведения. Обозначим $\{\lambda_n\}_1^\infty$ собственные значения (СЗ) краевой задачи, которую обозначим так же как и оператор $L(q,M)$

$$\ell y = \lambda y, \tag{1}$$

$$y(0) = y(\pi) = 0. \tag{2}$$

Не нарушая общности, будем предполагать, что $\omega := \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^\pi q(x)dx = 0$, чего всегда можно добиться сдвигом спектра. Асимптотика СЗ такова

$$\rho_n := \sqrt{\lambda_n} = n + \frac{\kappa_n}{n}, n \in \mathbf{N},\ \{\kappa_n\}_{n=1}^\infty \in l_2. \tag{3}$$

Пусть $S(x,\lambda)$ есть решение уравнения (1) с начальными условиями $S(0,\lambda)=0$, $S'(0,\lambda)=1$. Для этого решения имеет место следующее представление:

$$S(x,\lambda)=\frac{\sin\rho x}{\rho}+\int\limits_0^x K(x,t)\frac{\sin\rho t}{\rho}dt, \quad \lambda=\rho^2, \tag{4}$$

где ядро $K(x,t)$ – непрерывная, не зависящая от ρ функция. Функции $S(x,\lambda_n)$ являются СФ задачи (1), (2), а соответствующие СЗ совпадают с нулями характеристической функции задачи $\Delta(\lambda)=S(\pi,\lambda)$, то есть

$$\Delta(\lambda_n)=S(\pi,\lambda_n)=0.$$

Из асимптотики СФ ясно, что начиная с некоторого номера N узлы задачи $L(q,M)$ имеют те же свойства, что и узлы $L(q,0)$. То есть каждая n-я СФ имеет внутри интервала $(0,\pi)$ ровно n нулей ($n>N$). Обозначим позицию j-го узла n-й СФ x_n^j. Как и в [1], можно показать, что узлы образуют всюду плотное множество в $(0,\pi)$ и в качестве СД можно рассматривать не все узлы, а лишь их плотное в $(0,\pi)$ подмножество. Не указывая, как это делать, будем в данной работе считать, что $X\subset\{x_n^j\}$, что и является выбранным плотным подмножеством узлов.

Рассмотрим наряду с задачей $L(q,M)$ задачу $L(\tilde q,M)$ того же вида. Введем для неё объекты $\{\tilde\lambda_n\}_1^\infty$, $\tilde S(x,\lambda)$, $\{\tilde x_n^j\}$, $\tilde\omega$ аналогично задаче $L(q,M)$. Требуем, чтобы $\tilde\omega=0$.

Имеет место следующая теорема единственности.

Теорема. *Пусть даны задачи $L(q,M)$ и $L(\tilde q,M)$ вида (1), (2). Если $X=\tilde X$, то $q=\tilde q$ п.в. на $(0,1)$.*

Доказательство. Так как X – плотное в $(0,1)$ множество, то для любой точки $\xi\in(0,1)$ найдется сходящаяся к ξ подпоследовательность узлов из X, которую мы будем обозначать $\{x_k\}_{k\in K}$. Далее, СЗ двух задач $L(q,M)$ и $L(\tilde q,M)$ также рассмотрим для тех же индексов $k\in K$. Обозначим $S_k(x):=S(x,\lambda_k)$, $\tilde S_k(x):=\tilde S(x,\tilde\lambda_k)$. В силу определения этих функций имеем тождества:

$$-S_k''+qS_k+\int_0^x M(x,t)S_k(t)dt=\lambda_kS_k,$$

$$-\tilde S''{}_k+\tilde q\tilde S_k+\int_0^x M(x,t)\tilde S_k(t)dt=\tilde\lambda_k\tilde S_k.$$

Умножим первое из указанных тождеств на $\tilde S_k(x)$, второе – на $S_k(x)$ и почленно вычтем первое из второго, получим

$$S''_k\tilde{S}_k - \tilde{S}''_k S_k + (\tilde{q}-q)\tilde{S}_k S_k +$$
$$+\int_0^x M(x,t)\left(\tilde{S}_k(t)S_k(x) - S_k(t)\tilde{S}_k(x)\right)dt \equiv \left(\tilde{\lambda}_k - \lambda_k\right)S_k\tilde{S}_k.$$

Проинтегрируем последнее тождество в интервале $(0, x_k)$. Учтём при этом, что тождество Штурма $S''_k\tilde{S}_k - \tilde{S}''_k S_k = (S'_k\tilde{S}_k - \tilde{S}'_k S_k)'$ даст в силу начальных и краевых условий (в узловых точках) на $S_k(x)$ и $\tilde{S}_k(x)$ нулевой вклад в получившееся равенство

$$\int_0^{x_k}(\tilde{q}(x)-q(x))\tilde{S}_k(x)S_k(x)dx +$$
$$+\int_0^{x_k}\int_0^x M(x,t)\left(\tilde{S}_k(t)S_k(x) - S_k(t)\tilde{S}_k(x)\right)dtdx =$$
$$= \left(\tilde{\lambda}_k - \lambda_k\right)\int_0^{x_k} S_k(x)\tilde{S}_k(x)dx. \tag{5}$$

В силу (4) и (3) и их аналогов для задачи $L(\tilde{q}, M)$ равномерно по x имеем

$$S_k(x)\tilde{S}_k(x) = \frac{1-\cos 2kx}{2k^2} + O(\frac{1}{k^3}),$$
$$\tilde{S}_k(t)S_k(x) - S_k(t)\tilde{S}_k(x) = O(\frac{1}{k^3}). \tag{6}$$

Умножим обе части тождества (5) на k^2, тогда в силу представлений (5) и (6) его можно переписать как

$$\int_0^{x_k}(\tilde{q}(x)-q(x))\left(\tfrac{1-\cos 2kx}{2} + O(\tfrac{1}{k})\right)dx + \int_0^{x_k}\int_0^x M(x,t)O(\tfrac{1}{k})dtdx =$$
$$= \left(\tilde{\lambda}_k - \lambda_k\right)\int_0^{x_k} O(1)dx.$$

Перейдем к пределу в полученном тождестве при $k \to \infty$. При этом в силу выбора подпоследовательности узлов $x_k \to \xi$ при $k \to \infty$. В силу асимптотики (3) для СЗ $\tilde{\lambda}_k - \lambda_k = O(\frac{1}{k}) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$, и, значит, предел правой части равен нулю. В левой части второе слагаемое, очевидно, также в пределе даст нуль, а от первого в силу леммы Римана – Лебега останется $\int_0^\xi \frac{1}{2}(\tilde{q}(x)-q(x))\,dx$. Таким образом,

$$\int_0^\xi (\tilde{q}(x)-q(x))\,dx \equiv 0.$$

А так как ξ – произвольно выбранная точка из $(0,1)$, то $q = \tilde{q}$ п.в. на $(0,1)$. Теорема доказана.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ и ННС (проекты 07-01-00003, 07-01-92000-ННС-а).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *McLaughlin J.R.* Inverse theory Using Nodal Points as Data – A Uniqueness Result // J. Diff. Eq. 1988. Vol. 73, № 2. P. 354–362.

2. *Cheng Y.-H., Lau C.K.* The inverse nodal problems for Hill's equation // Inverse problems. 2006. Vol. 22. P. 891–901.

3. *Lau C.K., Tsay J.* On the well-posedness of the inverse nodal problem // Inverse problems. 2001. Vol. 17. P. 1493–1512.

4. *Курышова Ю.В.* Обратная спектральная задача для интегродифференциальных операторов // Мат. заметки. 2007. Т. 81, № 6. С. 855–866.

УДК 517.984

А.С. Луконина

О БАЗИСАХ РИССА ИЗ СОБСТВЕННЫХ И ПРИСОЕДИНЕННЫХ ФУНКЦИЙ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА С ИНТЕГРАЛЬНЫМ ГРАНИЧНЫМ УСЛОВИЕМ

В статье рассматривается оператор L, порожденный дифференциальным выражением:

$$l(y) = \beta y'(x) + y'(1-x) + p_1(x)\, y(x) + p_2(x)\, y(1-x)\,,\ x \in [0,1]\,, \qquad (1)$$

где $\beta^2 \neq 1$, $p_i \in C^1[0,1]\,(i=1,2)$, и интегральным граничным условием:

$$U(y) = \int_0^1 p(t)\ y(t)\ dt = 0, \quad p(t) = \frac{k(t)}{t^\alpha (1-t)^\alpha}, \qquad (2)$$

где $1/2 < \alpha < 1$, $k(t) \in C[0,1] \cap V[0,1]$ и удовлетворяет соотношению

$$\left(k^2(0) - \gamma^2 k^2(1)\right)\left(k^2(1) - \gamma^2 k^2(0)\right) \neq 0, \quad \gamma = \beta - \sqrt{\beta^2-1}. \qquad (3)$$

Граничное условие схожего с (2) вида $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{k(t)}{(1-|t|)^\alpha}\, y(t)\ dt = 0$ для оператора дифференцирования $L_0 y = y'(x)$ было впервые рассмотрено А.М. Седлецким. Оператор (1),(2) при $p_1(x) \equiv p_2(x) \equiv 0$ был подробно изучен А.П. Хромовым [1]. На основе этой работы для оператора (1), (2) автором была доказана равносходимость разложений по собственным и присоединенным функциям (в дальнейшем с.п.ф.) и в обычный тригонометрический ряд