Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ и ННС (проекты 07-01-00003, 07-01-92000-ННС-а).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *McLaughlin J.R.* Inverse theory Using Nodal Points as Data – A Uniqueness Result // J. Diff. Eq. 1988. Vol. 73, № 2. P. 354–362.
2. *Cheng Y.-H., Lau C.K.* The inverse nodal problems for Hill's equation // Inverse problems. 2006. Vol. 22. P. 891–901.
3. *Lau C.K., Tsay J.* On the well-posedness of the inverse nodal problem // Inverse problems. 2001. Vol. 17. P. 1493–1512.
4. *Курышова Ю.В.* Обратная спектральная задача для интегродифференциальных операторов // Мат. заметки. 2007. Т. 81, № 6. С. 855–866.

УДК 517.984

А.С. Луконина

О БАЗИСАХ РИССА ИЗ СОБСТВЕННЫХ И ПРИСОЕДИНЕННЫХ ФУНКЦИЙ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА С ИНТЕГРАЛЬНЫМ ГРАНИЧНЫМ УСЛОВИЕМ

В статье рассматривается оператор L, порожденный дифференциальным выражением:

$$l(y) = \beta y'(x) + y'(1-x) + p_1(x)\, y(x) + p_2(x)\, y(1-x), \; x \in [0,1], \qquad (1)$$

где $\beta^2 \neq 1$, $p_i \in C^1[0,1]\,(i = 1,2)$, и интегральным граничным условием:

$$U(y) = \int\limits_0^1 p(t)\; y(t)\; dt = 0, \quad p(t) = \frac{k(t)}{t^\alpha (1-t)^\alpha}, \qquad (2)$$

где $1/2 < \alpha < 1$, $k(t) \in C[0,1] \cap V[0,1]$ и удовлетворяет соотношению

$$\left(k^2(0) - \gamma^2 k^2(1)\right)\left(k^2(1) - \gamma^2 k^2(0)\right) \neq 0, \quad \gamma = \beta - \sqrt{\beta^2 - 1}. \qquad (3)$$

Граничное условие схожего с (2) вида $\int\limits_{-1}^1 \frac{k(t)}{(1-|t|)^\alpha}\, y(t)\; dt = 0$ для оператора дифференцирования $L_0 y = y'(x)$ было впервые рассмотрено А.М. Седлецким. Оператор (1),(2) при $p_1(x) \equiv p_2(x) \equiv 0$ был подробно изучен А.П. Хромовым [1]. На основе этой работы для оператора (1), (2) автором была доказана равносходимость разложений по собственным и присоединенным функциям (в дальнейшем с.п.ф.) и в обычный тригонометрический ряд

Фурье, получен аналог теоремы Жордана—Дирихле из теории тригонометрических рядов [2], а также установлена суммируемость по Риссу спектральных разложений [3], в настоящей статье исследуется базисность по Риссу системы с.п.ф. в пространстве $L_2\left[0,1\right]$. Для оператора $L_0 y$ эти результаты получены А.М. Седлецким [4].

Резольвента оператора L. Пусть $y = R_\lambda f$, где $R_\lambda = \left(L - \lambda E\right)^{-1}$, – резольвента оператора L (E – единичный оператор, λ – комплексный параметр). Тогда имеем

$$\beta y'\left(x\right) + y'\left(1-x\right) + p_1\left(x\right)y\left(x\right) + p_2\left(x\right)y\left(1-x\right) = \lambda y\left(x\right) + f\left(x\right). \qquad (4)$$

Полагая $u_1\left(x\right) = y\left(x\right)$, $u_2\left(x\right) = y\left(1-x\right)$ и беря еще (4) с заменой x на $\left(1-x\right)$, придём к системе

$$Bu'\left(x\right) + P\left(x\right)u\left(x\right) = \lambda u\left(x\right) + F\left(x\right), \qquad (5)$$

где $u\left(x\right) = \left(u_1\left(x\right), u_2\left(x\right)\right)^T$ (T – знак транспонирования), $B = \begin{pmatrix} \beta & -1 \\ 1 & -\beta \end{pmatrix}$, $P\left(x\right) = \begin{pmatrix} p_1\left(x\right) & p_2\left(x\right) \\ p_2\left(1-x\right) & p_1\left(1-x\right) \end{pmatrix}$, $F\left(x\right) = \left(f\left(x\right), f\left(1-x\right)\right)^T$. Система (5) есть система Дирака. Граничное условие (2) переходит в

$$\widetilde{U}(u) = \int\limits_0^1 N\left(t\right)\, u\left(t\right)\, dt = 0, \quad N\left(t\right) = \mathrm{diag}\left(p\left(t\right), p\left(1-t\right)\right). \qquad (6)$$

Лемма 1. *Если $y = R_\lambda f$, то $u\left(x\right)$ удовлетворяет системе (5),(6). Обратно, если $u\left(x\right)$ удовлетворяет (5),(6) и соответствующая однородная система имеет только нулевое решение, то R_λ существует и $R_\lambda = u_1\left(x\right)$.*

Лемма 2. *Преобразование $u = \Gamma w$ приводит систему (5), (6) к*

$$w'\left(x\right) + \widetilde{P}\left(x\right)w\left(x\right) = \lambda D w\left(x\right) + \widetilde{F}\left(x\right), \quad \widetilde{U}\left(\Gamma w\right) = 0, \qquad (7)$$

где $\widetilde{P}\left(x\right) = D\Gamma^{-1}P\left(x\right)\Gamma$, $\widetilde{F}\left(x\right) = D\Gamma^{-1}F\left(x\right)$, $\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & \gamma \\ \gamma & 1 \end{pmatrix}$, $D = diag\left(d, -d\right)$, $d = 1/\sqrt{\beta^2 - 1}$.

Пусть $H\left(x,\lambda\right) = H_0(x) + \frac{1}{\lambda}H_1(x)$, где $H_0(x) = \mathrm{diag}\left(h_{11}\left(x\right), h_{22}\left(x\right)\right)$, $h_{ii}\left(x\right) = \exp\left(-\int\limits_0^x p_{ii}\left(t\right)\, dt\right)$, $p_{ii}\left(x\right)$ $\left(i = 1,2\right)$ – диагональные элементы матрицы $\widetilde{P}(x)$, а $H_1(x)$ – кодиагональная матрица, определяемая единственным образом из матричного уравнения:

$$H_0'\left(x\right) + \widetilde{P}\left(x\right)H_0\left(x\right) + \left[H_1\left(x\right)D - DH_1\left(x\right)\right] = 0.$$

Лемма 3. При больших $|\lambda|$ преобразование $w = H(x,\lambda)\, z$ приводит (7) к следующей краевой задаче:

$$z'(x) + P_\lambda(x)\, z(x) = \lambda D z(x) + F_\lambda(x)\,, \quad \widetilde{U}(\Gamma H z) = 0, \tag{8}$$

где $P_\lambda(x) = \frac{1}{\lambda} H^{-1}(x,\lambda)\left[H_1'(x) + \widetilde{P}(x)\, H_1(x)\right]$, $F_\lambda(x) = H^{-1}(x,\lambda)\, \widetilde{F}(x)\,.$

При условии (3) (аналог условия регулярности Биркгофа), используя асимптотические свойства системы (8), получаем, что все $\lambda_k d$, где λ_k – собственные значения оператора L, находятся в некоторой полосе $\Pi =$ $= \{\lambda d \,|\, |\Re\lambda d| \le h\}$, причем число $\lambda_k d$ в прямоугольнике $|\Re\lambda d| \le h$, $|\Im\lambda d - t| \le 1$ ограничено при всех вещественных t. Полосу Π можно представить в виде объединения конечного числа различных групп равных между собой прямоугольников, границы которых Γ_k ($k = \pm 1, \pm 2, \ldots$; при возрастании $|k|$ контуры удаляются от начала координат) состоят из отрезков, лежащих на прямых $|\Re\lambda d| = \pm h$, и отрезков длины $2h$, параллельных вещественной оси. При этом контуры Γ_k находятся на положительном расстоянии от множества $\{\lambda_k\}$. Кроме того, для каждого Γ_k конкретной группы существует целое t_k такое, что $\Gamma_k = \Gamma + it_k$, где Γ – некоторый фиксированный контур этой группы, i – мнимая единица.

Лемма 4. *Пусть J – любой конечный набор целых чисел. Тогда имеет место оценка:* $\left\| \sum\limits_{k\in J} \int\limits_{\Gamma_k} R_\lambda \, d\lambda \right\| = O(1)$, *равномерная по J ($\|\cdot\|$ – норма в $L_2[0,1]$).*

Используя полноту в $L_2[0,1]$ системы с.п.ф. оператора L, получаем

Теорема. Система с.п.ф. оператора L образует базис Рисса со скобками в $L_2[0,1]$.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 06-01-00003).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Хромов А.П.* Об аналоге теоремы Жордана – Дирихле для разложений по собственным функциям дифференциально-разностного оператора с интегральным граничным условием // Докл. РАЕН. 2004. № 4. С. 80–87.

2. *Луконина А.С.* О сходимости разложений по собственным и присоединенным функциям одного дифференциально-разностного оператора с интегральным граничным условием // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2005. Вып. 7. С. 67–70.

3. *Луконина А.С.* О суммируемости по Риссу спектральных разложений одного функционально-дифференциального оператора с интегральным граничным условием // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2006. Вып. 8. С. 69–72.

4. *Седлецкий А.М.* Классы аналитических преобразований Фурье и экспоненциальные аппроксимации. М.: Физматлит, 2005.