2. *Субботин Ю.Н.* Новый кубический элемент в МКЭ // Тр. Института математики и механики УрО РАН. 2005. Т. 11, № 2. С. 120–130.

3. *Куприянова Ю.В.* Об оценке производной по направлению Эрмитова сплайна на треугольнике // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов, 2006. Вып. 8. С. 59–61.

УДК 519.4

В.А. Молчанов

О ЛОГИЧЕСКОЙ ОПРЕДЕЛЯЕМОСТИ ЯЗЫКОВ НА КОНЕЧНЫХ АВТОМАТАХ

В работе [1] предложен унифицированный подход к теории языков конечных автоматов на основе методов нестандартного анализа [2]: здесь естественно введено понятие распознаваемого автоматом Буши языка произвольных слов и описан класс $\mathrm{Rec}_B(A)$ таких языков. В последующей работе [3] с помощью методов нестандартного анализа естественно введено понятие языка произвольных слов, распознаваемого конечной полугруппой, и описан класс $\mathrm{Rec}_S(A)$ таких языков. Проведенные исследования показывают, что в отличие от равносильности понятий распознаваемых автоматами и полугруппами языков конечных слов [4] класс $\mathrm{Rec}_S(A)$ значительно шире класса $\mathrm{Rec}_B(A)$. С другой стороны, в работе [5] введено понятие обобщенного автомата Мюллера и доказано, что класс $\mathrm{Rec}_M(A)$ распознаваемых такими автоматами языков произвольных слов содержит класс $\mathrm{Rec}_S(A)$. С целью доказательства обратного включения $\mathrm{Rec}_M(A) \subset \mathrm{Rec}_S(A)$ в настоящей статье развивается теоретико-модельный подход к языкам произвольных слов, разработанный Буши [6] для языков конечных слов и языков бесконечных вправо слов.

В основе такого подхода лежит возможность описания языков над конечным алфавитом A формулами языка $\mathcal{L}$ монадической логики 2-го порядка [7] сигнатуры $\Omega = \{<, (R_a)_{a\in A}\}$, состоящей из одного символа бинарного предиката $<$ и семейства символов унарных предикатов R_a $(a \in A)$. Алфавит такого языка $\mathcal{L}$, помимо символов $<$ и R_a, содержит знак равенства $=$, символы логических связок $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow$ и кванторов $\forall, \exists$, предметные переменные $x, y, \ldots$, предикатные унарные переменные $X, Y, \ldots$ и скобки. Атомарными формулами языка $\mathcal{L}$ являются выражения $x = y$, $x < y$, $R_a(x)$, $X(x)$, где x, y – предметные переменные и X – предикатная унарная переменная. Из таких атомарных формул с помощью логических связок и кванторов обычным образом [7] строятся формулы языка $\mathcal{L}$.

Интерпретируются формулы языка $\mathcal{L}$ в алгебраических Ω-системах $M = \big(M, <_M, (R_a^M)_{a\in A}\big)$ с помощью отображения θ_1 предметных переменных в элементы множества M и отображения θ_2 предикатных переменных в подмножества множества M. При этом символы предикатов $<$ и R_a $(a \in A)$

интерпретируются как сигнатурные отношения $<_M$ и R_a^M $(a \in A)$ алгебраической Ω-системы M. В результате такой интерпретации каждая формула Φ языка $\mathcal{L}$ становится истинным или ложным утверждением о свойствах алгебраической Ω-системы M. Например, атомарная формула $x = y$ истинна, если $\theta_1(x) = \theta_1(x)$, формула $x < y$ истинна, если $\theta_1(x) <_M \theta_1(x)$, формула $R_a(x)$ истинна, если $\theta_1(x) \in R_a^M$, и формула $X(x)$ истинна, если $\theta_1(x) \in \theta_2(X)$. В случае истинности полученного из формулы Φ утверждения о системе M будем говорить, что формула Φ выполняется на алгебраической Ω-системе M при интерпретирующем отображении $\theta = (\theta_1, \theta_2)$ и записывать $M \models_\theta \Phi$. Будем говорить, что формула Φ тождественно истинна на алгебраической Ω-системе M и записывать $M \models \Phi$, если $M \models_\theta \Phi$ при любом интерпретирующем отображении $\theta = (\theta_1, \theta_2)$.

Рассмотрим конечный алфавит A. Пусть $W_{fin}(A)$ – множество всех конечных слов, $W^{\rightarrow}(A)$ – множество всех бесконечных вправо слов, $W^{\leftarrow}(A)$ – множество всех бесконечных влево слов, $W^{\leftrightarrow}(A)$ – множество всех бесконечных в обе стороны слов и $W(A) = W_{fin}(A) \cup W^{\rightarrow}(A) \cup W^{\leftarrow}(A) \cup W^{\leftrightarrow}(A)$ – множество всех слов над алфавитом A. Подмножества $W(A)$ называются *языками произвольных слов над алфавитом* A.

Поскольку каждое слово $w \in W(A)$ можно рассматривать как отображение некоторого отрезка (конечного или бесконечного в любую сторону) множества целых чисел $\mathbf{Z}$ в алфавит A, то для слова w канонически определяется алгебраическая Ω-система $M_w = (\mathbf{Z}, <, (R_a)_{a \in A})$, где $<$ – отношение сравнения целых чисел и $R_a = \overset{-1}{w}(a)$ для каждого $a \in A$. Будем говорить, что слово w удовлетворяет формуле Φ языка $\mathcal{L}$, если $M_w \models \Phi$. Множество всех слов $w \in W(A)$, удовлетворяющих условию $M_w \models \Phi$, называется *спектром формулы* Φ и обозначается символом $S(\Phi)$.

Для сокращения записи формул введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} x \le y \ &:= \ (x < y \vee x = y), \quad x \dot{<} y \ := \ (x < y \wedge \neg \exists z (x < z < y)), \\ D(x) \ &:= \ \bigvee_{a \in A} R_a(x), \quad x = \min \ := \ (D(x) \wedge \forall y (D(y) \Rightarrow x \le y)), \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad x = \max \ := \ (D(x) \wedge \forall y (D(y) \Rightarrow y \le x)). \end{aligned}$$

Так как формула $D(x)$ в алгебраической Ω-системе M_w определяет множество $\mathrm{dom}\, w$, то в языке $\mathcal{L}$ найдутся такие формулы Φ_{fin}, $\Phi^{\rightarrow}$, $\Phi^{\leftarrow}$ и $\Phi^{\leftrightarrow}$, которые определяют соответственно свойства конечности, бесконечности вправо, бесконечности влево и бесконечности в обе стороны слова w, т.е. выполняются равенства $S(\Phi_{fin}) = W_{fin}(A)$, $S(\Phi^{\rightarrow}) = W^{\rightarrow}(A)$, $S(\Phi^{\leftarrow}) = W^{\leftarrow}(A)$ и $S(\Phi^{\leftrightarrow}) = W^{\leftrightarrow}(A)$. Например, слово w конечно в том и только том случае, если оно удовлетворяет формуле $\Phi_{fin} \ := \ \exists x \exists y (x = \min \wedge y = \max)$, и бесконечно вправо, если оно удовлетворяет формуле

$$\Phi^{\rightarrow} \ := \ \exists x (x = \min \wedge \forall y \exists z (y < z \wedge D(z))).$$

Пусть $\mathcal{A} = (Q, A, E, c, F, \mathcal{I}, \mathcal{J}, \mathcal{T})$ – некоторый обобщенный автомат Мюллера [5] с множеством состояний $Q = \{1, 2, \dots, n\}$, множеством переходов $E \subset Q \times A \times Q$, центральным состоянием $c \in Q$, множеством заключительных состояний $F \subset Q$, левой и правой таблицами состояний $\mathcal{I}, \mathcal{J}$ и таблицей состояний $\mathcal{T}$. Из результатов работы [7] следует, что существование в автомате $\mathcal{A}$ пути с меткой $w \in W(A)$ можно определить с помощью формулы

$$\Psi \ := \ \left(\bigwedge_{i \neq j} \neg \exists x \left(D(x) \wedge X_i(x) \wedge X_j(x) \right) \right) \ \wedge$$
$$\wedge \ \left(\forall x \forall y \left(x \dot{<} y \wedge D(x) \wedge D(y) \Rightarrow \bigvee_{(i,a,j) \in E} \left(X_i(x) \wedge R_a(x) \wedge X_j(y) \right) \right) \right).$$

При этом в языке $\mathcal{L}$ найдутся такие формулы Ψ_1, Ψ_2, Ψ_3 и Ψ_4, которые определяют успешность такого пути соответственно для конечного, бесконечного вправо, бесконечного влево и бесконечного в обе стороны слова w. Например, конечное слово w успешно в автомате $\mathcal{A}$ в том и только том случае, если оно удовлетворяет соотношению $\Psi_1 \ := \ X_c(\min) \wedge \bigvee_{i \in F} X_i(\max)$, и бесконечное вправо слово w успешно в автомате $\mathcal{A}$ в том и только том случае, если оно удовлетворяет условию

$$\Psi_2 \ := \ X_c(\min) \wedge \bigvee_{B \in \mathcal{J}} \left(\bigwedge_{i \in B} \left(\forall x \left(D(x) \Rightarrow \exists y \left(x < y \wedge X_i(y) \right) \right) \right) \right).$$

Теорема. *Для обобщенного автомата Мюллера $\mathcal{A}$ спектр формулы*

$$\exists X_1 \dots \exists X_n \left(\Psi_0 \wedge (\Phi_{fin} \Rightarrow \Psi_1) \wedge (\Phi^{\rightarrow} \Rightarrow \Psi_2) \wedge (\Phi^{\leftarrow} \Rightarrow \Psi_3) \wedge (\Phi^{\leftrightarrow} \Rightarrow \Psi_4) \right)$$

совпадает с распознаваемым автоматом $\mathcal{A}$ языком произвольных слов.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Molchanov V.A.* Nonstandard approach to general rational languages // Contributions to General Algebra. 2001. Vol. 13. P. 233–244.

2. *Альбеверио С., Фенстад Й., Хеэг-Крон Р., Линдстрем Т.* Нестандартные методы в стохастическом анализе и математической физике. М.: Мир, 1990. 616 с.

3. *Молчанов В.А.* О распознавании языков произвольных слов конечными полугруппами // Известия Сарат. ун-та. Нов. сер. 2006. Т. 6. Сер. Математика. Механика. Информатика, вып. 1/2. С. 96–108.

4. *Pin J.E.* Finite semigroups and recognizable languages: an introduction // Semigroups, Formal Languages and Groups, NATO ASI Series C: Mathematical and Physical Sciences. 1993. Vol. 466. P. 1–32.

5. *Молчанов В.А.* О распознавании языков полугруппами и автоматами // Математика. Механика: Сб. науч. тр. 2006. Вып. 8. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, С. 83–86.

6. *Büchi J.R.* Weak second-order arithmetic and finite automata // Z. Math. Logik and Grundl. Math. 1960. Vol. 6. P. 66–92.

7. *Perrin D., Pin J.E.* Semigroups and automata on infinite words // Semigroups, Formal Languages and Groups, NATO ASI Series C: Mathematical and Physical Sciences. 1993. Vol. 466. P. 49–72.

УДК 519.853.3 + 517.518.82

Е.А. Нарыжная

О НАИЛУЧШЕМ ПРИБЛИЖЕНИИ НЕПРЕРЫВНОЙ СЕГМЕНТНОЙ ФУНКЦИИ АЛГЕБРАИЧЕСКИМ ПОЛИНОМОМ

1. Пусть $g_1(t)$ и $g_2(t)$ – непрерывные на отрезке $[c,d]$ функции, причем $g_1(t) < g_2(t)$ при $t \in [c,d]$. Обозначим через $P_n(A,t) = a_0 + a_1 t + \ldots + a_n t^n$ полином n-й степени с вектором коэффициентов $A = (a_0, a_1, \ldots, a_n)$. $\Phi(t) = [g_1(t), g_2(t)]$ – сегментная функция (с.ф.), сопоставляющая каждому значению $t \in [c,d]$ соответствующий сегмент.

Рассмотрим следующую задачу о наилучшем приближении с.ф. $\Phi(t)$ полиномом n-й степени:

$$\varphi(A) \stackrel{df}{=} \max_{t\in[c,d]} (\rho(\Phi(t), P_n(A,t)) + \rho(P_n(A,t), \Phi(t))) \longrightarrow \inf_{A\in R^{n+1}}, \tag{1}$$

где

$$\rho(\Phi(t), P_n(A,t)) = \max\{g_2(t) - P_n(A,t), P_n(A,t) - g_1(t)\}$$

есть уклонение с.ф. от полинома,

$$\rho(P_n(A,t), \Phi(t)) = \max\{P_n(A,t) - g_2(t), g_1(t) - P_n(A,t), 0\}$$

есть уклонение полинома от с.ф.

Очевидно, что функция $F(A,t) \stackrel{df}{=} \rho(\Phi(t), P_n(A,t)) + \rho(P_n(A,t), \Phi(t))$ выпукла по A на R^{n+1} при каждом фиксированном $t \in [c,d]$. Следовательно (см., например [1]), и функция $\varphi(A)$ является выпуклой на R^{n+1}. Обозначим через

$$R(A) \stackrel{df}{=} \{t \in [c,d] : \varphi(A) = F(A,t)\},$$

$$R_1(A) \stackrel{df}{=} \left\{ t \in R(A) : P_n(A^*, t_i) - \frac{g_2(t_i) + g_1(t_i)}{2} > 0 \right\},$$

$$R_2(A) \stackrel{df}{=} \left\{ t \in R(A) : P_n(A^*, t_i) - \frac{g_2(t_i) + g_1(t_i)}{2} < 0 \right\},$$