5. *Молчанов В.А.* О распознавании языков полугруппами и автоматами // Математика. Механика: Сб. науч. тр. 2006. Вып. 8. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, С. 83–86.

6. *Büchi J.R.* Weak second-order arithmetic and finite automata // Z. Math. Logik and Grundl. Math. 1960. Vol. 6. P. 66–92.

7. *Perrin D., Pin J.E.* Semigroups and automata on infinite words // Semigroups, Formal Languages and Groups, NATO ASI Series C: Mathematical and Physical Sciences. 1993. Vol. 466. P. 49–72.

УДК 519.853.3 + 517.518.82

Е.А. Нарыжная

О НАИЛУЧШЕМ ПРИБЛИЖЕНИИ НЕПРЕРЫВНОЙ СЕГМЕНТНОЙ ФУНКЦИИ АЛГЕБРАИЧЕСКИМ ПОЛИНОМОМ

1. Пусть $g_1(t)$ и $g_2(t)$ – непрерывные на отрезке $[c,d]$ функции, причем $g_1(t) < g_2(t)$ при $t \in [c,d]$. Обозначим через $P_n(A,t) = a_0 + a_1 t + \ldots + a_n t^n$ полином n-й степени с вектором коэффициентов $A = (a_0, a_1, \ldots, a_n)$. $\Phi(t) = [g_1(t), g_2(t)]$ – сегментная функция (с.ф.), сопоставляющая каждому значению $t \in [c,d]$ соответствующий сегмент.

Рассмотрим следующую задачу о наилучшем приближении с.ф. $\Phi(t)$ полиномом n-й степени:

$$\varphi(A) \overset{df}{=} \max_{t\in[c,d]} (\rho(\Phi(t), P_n(A,t)) + \rho(P_n(A,t), \Phi(t))) \longrightarrow \underset{A\in R^{n+1}}{inf}, \qquad (1)$$

где

$$\rho(\Phi(t), P_n(A,t)) = \max\{g_2(t) - P_n(A,t), P_n(A,t) - g_1(t)\}$$

есть уклонение с.ф. от полинома,

$$\rho(P_n(A,t), \Phi(t)) = \max\{P_n(A,t) - g_2(t), g_1(t) - P_n(A,t), 0\}$$

есть уклонение полинома от с.ф.

Очевидно, что функция $F(A,t) \overset{df}{=} \rho(\Phi(t), P_n(A,t)) + \rho(P_n(A,t), \Phi(t))$ выпукла по A на R^{n+1} при каждом фиксированном $t \in [c,d]$. Следовательно (см., например [1]), и функция $\varphi(A)$ является выпуклой на R^{n+1}. Обозначим через

$$R(A) \overset{df}{=} \{t \in [c,d] : \varphi(A) = F(A,t)\},$$

$$R_1(A) \overset{df}{=} \left\{t \in R(A) : P_n(A^*, t_i) - \frac{g_2(t_i) + g_1(t_i)}{2} > 0\right\},$$

$$R_2(A) \overset{df}{=} \left\{t \in R(A) : P_n(A^*, t_i) - \frac{g_2(t_i) + g_1(t_i)}{2} < 0\right\},$$

$$R_3(A) \overset{df}{=} \{t \in R(A) : P_n(A^*, t_i) - g_2(t) = g_1(t) - P_n(A,t)\}.$$

Пользуясь субдифференциальным исчислением выпуклых функций [1, 2] можно доказать, что имеет место

Теорема 1. *Субдифференциал $\partial\varphi(A)$ функции $\varphi(A)$ может быть выражен следующей формулой:*

$$\partial\varphi(A) = co\{\xi(t)(1, t, \ldots, t^n | t \in R(A))\}, \tag{2}$$

где

$$\xi(t) = \begin{cases} [1,2], t \in R_1(A), \\ [-2,-1], t \in R_2(A), \\ [-1,1], t \in R_3(A). \end{cases} \tag{3}$$

2. Сформулируем критерий решения задачи (1).

Теорема 2. *Для того чтобы вектор A^* был решением задачи (1), необходимо и достаточно, чтобы выполнялось хотя бы одно из условий:*

а) $R_3(A^*) \neq \varnothing$;

б) найдутся точки $\{t_i\}_{i=\overline{0,n+1}} \subset R(A^*) : c \leq t_0 < t_1 < \ldots < t_{n+1} \leq d$ такие, что если $t_i \in R_1(A^*)$ (соответственно $t_i \in R_2(A^*)$), то $t_{i+1} \in R_2(A^*)$ (соответственно $t_{i+1} \in R_1(A^*)$) для всех $i = \overline{0, n+1}$.

Доказательство. В соответствии с известным фактом из выпуклого анализа [2, с. 142], для того чтобы вектор A^* давал минимальное значение выпуклой функции $\varphi(A^*)$ на R^{n+1} необходимо и достаточно, чтобы

$$0_{n+1} \in \partial\varphi(A^*). \tag{4}$$

Необходимость. Пусть для A^* выполняется (4) и $R_3(A^*) \neq \varnothing$, достаточно рассмотреть случаи

1. $R(A^*) = R_1(A^*)$ или $R(A^*) = R_2(A^*)$. Тогда из (2), (3) следует $0_{n+1} \notin \partial\varphi(A^*)$, то есть получаем противоречие с (4).

2. $R(A^*) = R_1(A^*) \cup R_2(A^*)$. Из (2)–(4) получаем

$$0_{n+1} \in co\{\xi(t)(1, t, \ldots, t^n | t \in R(A^*))\}.$$

Отсюда, учитывая $R_3(A^*) = \varnothing$, по теореме 1 из [3] следует, что существует $\{t_i\}_{i=\overline{0,n+1}} : c \leq t_0 < t_1 < \ldots < t_{n+1} \leq d$ и функция $f(t) \in \xi(t)$ такая, что $\text{sgn} f(t_i) = -\text{sgn} f(t_{i+1})$. В соответствии с (3) это означает, что если $t_i \in R_1(A^*)$, то $t_{i+1} \in R_2(A^*)$, $i = \overline{0, n+1}$ (или если $t_i \in R_2(A^*)$, то $t_{i+1} \in R_1(A^*)$). Таким образом, получаем, что выполняется условие б).

Достаточность. Предположим, что выполняется условие (а). Тогда из (3) следует, что $0 \in \xi(t^*)$ для $t^* \in R_3(A^*)$, а значит из (2) получаем (4), то есть A^* – решение задачи.

Пусть теперь выполняется условие (б). То есть существует упорядоченный набор $\{t_i\}_{i=\overline{0,n+1}} \subset R_1(A^*) : c \leq t_0 < t_1 < \ldots < t_{n+1} \leq d$, причем если $t_i \in R_1(A^*)$ (соответственно $t_i \in R_2(A^*)$), то $t_{i+1} \in R_2(A^*)$ (соответственно $t_{i+1} \in R_1(A^*)$). Тогда в соответствии с (3) этим точкам можно сопоставить значения $f(t_i) \in \xi(t_i)$, и функция $\mathrm{sgn} f(t_i) = = -\mathrm{sgn} f(t_{i+1})$. Используя теорему 1 из [3], в силу (2) получаем, что

$$0_{n+1} \in co\,\{\xi(t)(1, t, \ldots, t^n | t \in R_1(A^*) \cup R_2(A^*))\} \subset \partial\varphi(A^*).$$

Теорема доказана.

3. Задача (1) отличается от задачи из [4] наличием второго слагаемого

$$\rho(P_n(A,t), \Phi(t)) = \max\{P_n(A,t) - g_2(t), g_1(t) - P_n(A,t), 0\}.$$

Рассмотрим пример, в котором решение задачи (1) будет отличаться от решения задачи из [4], а также от задачи Чебышева, в которой приближаемая функция имеет следующий вид:

$$g(t) = \frac{g_1(t) + g_2(t)}{2}.$$

Возьмем $g_1(t) = t, g_2(t) = \begin{cases} 4 + t, t \leq 1, \\ 7 - 2t, t \geq 1, \end{cases}$ $t \in [0, 2]$, и $n = 1$. Решением задачи (1) является $P_1^{\mathrm{I}}(t) = 7/3 + 1/3t$, в то время как $P_1^{\mathrm{II}}(t) = 2 + t$ – решение задачи из [4], а $P_1^{\mathrm{III}}(t) = 19/8 + 1/4t$ – решение задачи Чебышева с приближаемой функцией

$$g(t) = \begin{cases} 2 + t, t \leq 1, \\ 3,5 - 0,5t, t \geq 1. \end{cases}$$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Демьянов В. Ф. Васильев Л.В.* Недифференцируемая оптимизация. М.: Наука, 1981.

2. *Пшеничный Б.Н.* Выпуклый анализ и экстремальные задачи. М.: Наука, 1980.

3. *Дудов С.И.* О двух вспомогательных фактах для исследования задач полиномиального приближения // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2007. Вып.9. С. 22–26

4. *Выгодчикова И.Ю.* О наилучшем приближении непрерывного многозначного отображения алгебраическим полиномом // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2000. Вып. 2. С. 13–15.