УДК 517.51

В.В. Новиков

ИНТЕРПОЛЯЦИЯ ТИПА ЛАГРАНЖА – ЯКОБИ И АНАЛОГ УСИЛЕННОГО C-СВОЙСТВА

Пусть $\alpha, \beta > -1$ и $\{P_n^{(\alpha,\beta)}(x)\}_{n=0}^{\infty}$ – последовательность многочленов Якоби, ортогональных на отрезке $[-1,1]$ с весом $w(x) = (1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}$; при $\alpha = -1, \beta > -1$, многочлен $P_n^{(-1,\beta)}(x)$ определяется [1] равенством

$$nP_n^{(-1,\beta)}(x) = \frac{1}{2}(n+\beta)(x-1)P_{n-1}^{(1,\beta)}(x).$$

Аналогично определяют $P_n^{(\alpha,-1)}(x), \alpha > -1$. Пусть, далее,

$$-1 \le x_{n,n} < x_{n-1,n} < \ldots < x_{1,n} \le 1$$

– нули многочлена $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$, пронумерованные в порядке убывания. Для функции $f \in C[-1,1]$ обозначим через $L_n(\mathfrak{M}^{(\alpha,\beta)}, f, x)$ многочлен Лагранжа, интерполирующий ее в узлах n-й строки матрицы $\mathfrak{M}^{(\alpha,\beta)} = \{x_{k,n}\}_{k=1,n=1}^{n,\infty}$, а через ${S_n}^{(\alpha,\beta)}(f,x)$ – частичную сумму ряда Фурье–Якоби этой функции.

Известно, что интерполяционный процесс $\{L_n(\mathfrak{M}^{(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2})}, f, x)\}_{n=1}^{\infty}$ для функции $f \in C[-1,1]$ может оказаться расходящимся всюду, соответствующие примеры были построены независимо в 1936, 1937 гг. Грюнвальдом [2] и Марцинкевичем [3]. При произвольных $\alpha, \beta > -1$ Приваловым [4] в 1976 г. доказана возможность расходимости последовательности $\{L_n(\mathfrak{M}^{(\alpha,\beta)}, f, x)\}_{n=1}^{\infty}$ почти всюду на $[a,b] \subset (-1,1)$ для непрерывной функции f. Более того, в 1980 г. Эрдёш и Вертеши [5] показали, что для совершенно произвольной матрицы узлов интерполирования $\mathfrak{M} \subset [-1,1]$ найдется функция $f \in C[-1,1]$ такая, что интерполяционный процесс $\{L_n(\mathfrak{M}, f, x)\}_{n=1}^{\infty}$ расходится почти всюду. Отметим, что добиться расходимости всюду для непрерывной функции и произвольной матрицы узлов уже невозможно, как это следует из результатов Коровкина [6] и Мергеляна [7].

Данные факты говорят о том, что в определенном смысле интерполяционный процесс для произвольной непрерывной функции может вести себя так же, как ряд Фурье произвольной измеримой функции. В то же время известно, что любую измеримую функцию можно исправить на множестве сколь угодно малой меры так, что ее ряд Фурье станет равномерно сходящимся. Точнее, справедлива теорема Меньшова (см., например, [8]) о наличии у измеримой, почти всюду конечной 2π-периодической функции так называемого усиленного C-свойства: *для любой функции f указанного вида и любого $\varepsilon > 0$ существует функция g такая, что $f = g$ на некотором* *множестве E, $\mu E > 2\pi - \varepsilon$, и ряд Фурье $\sigma(g)$ сходится равномерно на* [-π,π].

Этот результат с помощью теорем равносходимости переносится на ряды Фурье по некоторым другим ортогональным системам функций (в частности, на ряды Фурье – Якоби). Возникает вопрос, не обладает ли класс непрерывных функций подобным свойством по отношению к интерполяционному процессу $\{L_n(\mathfrak{M}^{(\alpha,\beta)}, f, x)\}_{n=1}^{\infty}$, поскольку между полиномами $L_n(\mathfrak{M}^{(\alpha,\beta)}, f, x)$ и $S_n^{(\alpha,\beta)}(f, x)$ существует далеко идущая аналогия. Для матрицы узлов $\mathfrak{M}^{(\alpha,\beta)}$ вопрос открыт, однако для одного класса «близких» к ней матриц ответ является положительным.

Теорема. *Пусть $a, b, -1 < a < b < 1$ – произвольные фиксированные числа, последовательность $\delta = \{\delta_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}_+$ такова, что $\delta_n \to 0$ при $n \to \infty$ и показатели α, β принимают любые описанные выше значения. Тогда существует матрица узлов интерполирования $\mathfrak{M}_\delta^{(\alpha,\beta)} = \{y_{k,n}\}_{k=1,n=1}^{n,\infty}$ со следующими свойствами:*

1) $\max\limits_{1\le k\le n} |x_{k,n} - y_{k,n}| < \delta_n,\ n \in \mathbb{N}$;

2) *для любых $f \in C[-1, 1]$ и $\varepsilon \in (0, b-a)$ найдутся функция $g \in C[-1, 1]$ и множество $E \subset [a, b]$, $\mu E > b - a - \varepsilon$ такие, что $f = g$ на E и*

$$\lim_{n\to\infty} \left\| L_n(\mathfrak{M}_\delta^{(\alpha,\beta)}, g, \cdot) - g \right\|_{C[a,b]} = 0.$$

Ввиду громоздкости доказательства, опишем только его основную идею. С помощью метода работы [9] доказывается, что для произвольной ступенчатой функции существует кусочно-линейная функция, отличающаяся от нее на множестве как угодно малой меры и такая, что интерполяционный процесс с узлами $\{y_{k,n}\}_{k=1,n=1}^{n,\infty}$ равномерно сходится; при этом sup-нормы многочленов Лагранжа удовлетворяют некоторым дополнительным условиям. Так как произвольная непрерывная функция представима сходящимся рядом из ступенчатых функций, к каждой из таких функций применяется указанная процедура исправления. Сумма ряда исправленных ступенчатых функций даст искомую исправленную функцию. Для проверки сходимости интерполяционного процесса для полученной функции используется дискретное условие сходимости из работы [10].

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 07-01-00167-а).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Сеге Г.* Ортогональные многочлены. М.: Физматлит, 1962.

2. *Grünwald G.* Über Divergenzerscheinungen der Lagrangeschen Interpolationspolynome Stetiger Funktionen // Ann. Math. 1936. Vol. 37. P. 908–918.

3. *Marcinkiewicz J.* Sur la divergence des polynomes d'interpolation // Acta Litt. Sci. Szeged. 1936/37. Vol. 8. P. 131–135.

4. *Привалов А.А.* О расходимости интерполяционных процессов Лагранжа по узлам Якоби на множестве положительной меры // Сиб. мат. журн. 1976. Т. 17, №4. С. 837–859.

5. *Erdős P., Vértesi P.* On the almost everywhere divergence of Lagrange interpolatory polynomials for arbitrary system of nodes // Acta. Math. Acad. Sci. Hungar. 1980. Vol. 36 (1-2). P. 71–89.

6. *Коровкин П.П.* О замкнутости системы функций Чебышева // ДАН СССР. 1951. Т. 78, № 5. С. 853–855.

7. *Мергелян С.Н.* Некоторые вопросы конструктивной теории функций // Тр. МИАН СССР. 1951. Т. 37. С. 1–97.

8. *Бари Н. К.* Тригонометрические ряды. М.: Физматлит, 1961.

9. *Новиков В. В.* О расходимости ряда Фурье функции со сходящимся интерполяционным процессом Лагранжа // Analysis Mathematica. 2003. Vol. 29. P. 289–317.

10. *Новиков В. В.* Критерий равномерной сходимости интерполяционного процесса Лагранжа – Якоби // Мат. заметки. 2006. Т. 79, вып. 2. С. 254–266.

УДК 519.4

В.Е. Новиков

КОНЦЕПТЫ И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ЗАВИСИМОСТИ

Статья посвящена исследованию связи между структурой формальных концептов и структурой функциональных зависимостей на n-арном отношении. Эти исследования инициированы задачей минимизации n-арного отношения с сохранением структуры формальных концептов. Главный результат статьи устанавливает совпадение множеств $\bar{\imath}_s$-концептов по различным индексам атрибутов, если между их атрибутами существует взаимная функциональная зависимость.

Восстановим основные определения концептуального анализа [1], используя аппарат алгебры отношений В.В. Вагнера [2] на контексте с n-арным отношением. Пусть $\rho \subseteq M_1 \times \cdots \times M_n$ – n-арное отношение. Обозначим $\bar{n} := (1, 2, \ldots, n)$, $M_{\bar{n}} := M_1 \times M_2 \times \cdots \times M_n$, $\bar{\imath}_1 = i_1$ и $\bar{\imath}_k := (i_1, i_2, \ldots, i_k)$, $x_{\bar{\imath}_k} := (x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k})$, $M_{\bar{\imath}_k} := M_{i_1} \times M_{i_2} \times \cdots \times M_{i_k}$ для произвольных $1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n$. Для удобства введём обозначения для результатов булевых операций над данными множествами: $\overline{\imath_k \jmath_s} := \bar{\imath}_k \cup \bar{\jmath}_s$, $\overline{\imath_k * \jmath_s} := \bar{\imath}_k \cap \bar{\jmath}_s$, $\overline{\imath_k \setminus \jmath_s} := \bar{\imath}_k \setminus \bar{\jmath}_s$. Например, при $\bar{\imath}_3 = (1, 3, 4), \bar{\jmath}_3 = (3, 5, 6)$ имеем $\overline{\imath_3 \jmath_3} = (1, 3, 4, 5, 6), \overline{\imath_3 * \jmath_3} = 3, \overline{\imath_3 \setminus \jmath_3} = (1, 4)$. При этом также обозначаем $\bar{\imath}_k \subseteq \bar{n}$. Говорим, что k-система $x_{\bar{\imath}_k}$ *входит в отношение* ρ, если существует n-система $x_{\bar{n}} \in \rho$, для которой элементы $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k}$ являются её соответствующими компонентами. Для $\bar{\imath}_s, \bar{\jmath}_k \subseteq \bar{n}$, $a_{\bar{\imath}_s} \in M_{\bar{\imath}_s}$, $X \subseteq M_{\bar{\imath}_s}$ обозначим:

$$\pi_{\bar{\jmath}_k}(\rho) := \{y_{\bar{\jmath}_k} \in M_{\bar{\jmath}_k} \mid y_{\bar{\jmath}_k} \text{входит в } \rho\};$$

$$\sigma_{\{a_{\bar{\imath}_s}\}}(\rho) := \{x_{\bar{n}} \in \rho \mid \ a_{\bar{\imath}_s} \subseteq x_{\bar{n}}\};\ \rho_{\bar{\jmath}_k}\langle x_{\bar{\imath}_s}\rangle := \pi_{\bar{\jmath}_k}(\sigma_{\{x_{\bar{\imath}_s}\}}(\rho));$$

$$\widehat{\rho}_{\bar{\jmath}_k}(X) := \cap\{\rho_{\bar{\jmath}_k}\langle x_{\bar{\imath}_s}\rangle : x_{\bar{\imath}_s} \in X\};\ \widehat{\rho}_{\bar{\imath}_s\bar{\jmath}_k}(X) := \widehat{\rho}_{\bar{\imath}_s}(\widehat{\rho}_{\bar{\jmath}_k}(X)).$$