БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Мулен Э.* Кооперативное принятие решений: аксиомы и модели / Пер. с англ. М.: Мир, 1991. 464 с.

2. *Пасечник М.В., Розен В.В.* Игры с квазиупорядоченными исходами, имеющие единственный индивидуально рациональный исход // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2002. Вып. 3. С. 87–90.

УДК 512.56

В.Б. Поплавский

ОБ ОДНОМ СВОЙСТВЕ ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ БУЛЕВЫХ МАТРИЦ

В нашей статье продолжается построение теории определителей матриц над произвольной булевой алгеброй, начатой в статье [1] и получившей развитие в работах [2-6]. Доказывается утверждение, которое помогает оценить число образующих, порождающих столбцы (или строки) данной булевой матрицы.

Определитель квадратной булевой матрицы был введен О.Б. Соколовым в работе [1] для изучения матриц, элементами которых являются формулы логики. Большая часть этой статьи посвящена теории булевого определителя. Он определяется как симметрическая разность

$$DetA = \overset{+}{\nabla} A \oplus \overset{-}{\nabla} A = (\overset{+}{\nabla} A \setminus \overset{-}{\nabla} A) \cup (\overset{-}{\nabla} A \setminus \overset{+}{\nabla} A)$$

полуперманентов

$$\overset{+}{\nabla} A = \bigcup_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)\in\overset{+}{P}} (a_1^{\alpha_1} \cap a_2^{\alpha_2} \cap \ldots \cap a_n^{\alpha_n}) \quad \text{и} \quad \overset{-}{\nabla} A = \bigcup_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)\in\overset{-}{P}} (a_1^{\alpha_1} \cap a_2^{\alpha_2} \cap \ldots \cap a_n^{\alpha_n})$$

(все четные и нечетные перестановки обозначены $\overset{+}{P}$ и $\overset{-}{P}$ соответственно) матрицы $A = (a_j^i)$, элементы которой a_j^i принадлежат произвольной булевой алгебре $\langle B, \cup, \cap, ', 0, I \rangle$. Показаны такие свойства определителя, как его сохранение при транспонировании, его неизменность при перестановке строк, равенство нулю для двух одинаковых строк. Доказано свойство аддитивности по столбцу определителя, которое можно записать в форме

$$DetA = \begin{pmatrix} a_1^1 & \dots & (b_k^1 \cup c_k^1) & \dots & a_n^1 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_1^n & \dots & (b_k^n \cup c_k^n) & \dots & a_n^n \end{pmatrix} =$$

$$= (\overset{+}{\nabla} \begin{pmatrix} a_1^1 & \dots & b_k^1 & \dots & a_n^1 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_1^n & \dots & b_k^n & \dots & a_n^n \end{pmatrix} \cup \overset{+}{\nabla} \begin{pmatrix} a_1^1 & \dots & c_k^1 & \dots & a_n^1 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_1^n & \dots & c_k^n & \dots & a_n^n \end{pmatrix}) \oplus$$

$$\oplus (\overset{-}{\nabla} \begin{pmatrix} a_1^1 & \dots & b_k^1 & \dots & a_n^1 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_1^n & \dots & b_k^n & \dots & a_n^n \end{pmatrix} \cup \overset{-}{\nabla} \begin{pmatrix} a_1^1 & \dots & c_k^1 & \dots & a_n^1 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_1^n & \dots & c_k^n & \dots & a_n^n \end{pmatrix}).$$

Получена формула разложения определителя, которую можно также записать в виде

$$DetA = (\bigcup_{k=1}^{n} (a_k^i \cap \overset{+}{\nabla} \partial_k^i A)) \oplus (\bigcup_{k=1}^{n} (a_k^i \cap \overset{-}{\nabla} \partial_k^i A)),$$

что очевидно, так как полуперманенты раскладываются по строке по правилу Лапласа (см. также [2, 3, 6]). Автор, кроме того, доказывает, что если строки линейно зависимы, то определитель равен нулю, и отмечает, что обратное не выполняется в общем случае.

Это последнее утверждение обобщается в следующей теореме, доказательство которой мы приводим далее.

Обозначим через $B_{n\times m}$ модуль булевых матриц размера $n \times m$ над булевым полукольцом B.

Теорема. *Предположим, что для некоторой квадратной матрицы $A \in B_{n\times n}$ существует такой набор каких-то, не обязательно выбираемых из матрицы A, столбцов $B_1, B_2, \dots, B_k \in B_{n\times 1}$, и любой столбец $A_1, A_2, \dots, A_n \in B_{n\times 1}$ матрицы A является их линейной комбинацией, то есть $A_j = (\lambda_j^1 \cap B_1) \cup (\lambda_j^2 \cap B_2) \cup \ldots \cup (\lambda_j^k \cap B_k)$ для некоторых булевых коэффициентов λ_j^i, $i = 1, \dots, k$ и $j = 1, \dots, n$. Тогда, если $k < n$, то $DetA = 0$.*

Аналогичное утверждение справедливо и для строк.

Доказательство. Вначале покажем, что для полуперманентов матрицы, j-й столбец которой является линейной комбинацией столбцов

$$B_j = \begin{pmatrix} b_j^1 b_j^2 & \dots & b_j^n \end{pmatrix}^T \ (j = 1, \dots, k),$$

выполняется равенство

$$\overset{\pm}{\nabla}\begin{pmatrix} \dots & a^1_{j-1} & \bigcup_{t=1}^k(\lambda^t\cap b^1_t) & a^1_{j+1} & \dots \\ \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots \\ \dots & a^n_{j-1} & \bigcup_{t=1}^k(\lambda^t\cap b^n_t) & a^n_{j+1} & \dots \end{pmatrix} =$$

$$= \bigcup_{t=1}^{k}(\lambda^t \cap \overset{\pm}{\nabla}\begin{pmatrix} \dots & a^1_{j-1} & b^1_t & a^1_{j+1} & \dots \\ \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots \\ \dots & a^n_{j-1} & b^n_t & a^n_{j+1} & \dots \end{pmatrix}).$$

Здесь знаки полуперманентов выбираются либо верхние, либо нижние соответственно. Это равенство показывает, что полуперманенты обладают свойством линейности по столбцу (по строке). Действительно,

$$\overset{\pm}{\nabla}\begin{pmatrix} \dots & a^1_{j-1} & \bigcup_{t=1}^k(\lambda^t\cap b^1_t) & a^1_{j+1} & \dots \\ \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots \\ \dots & a^n_{j-1} & \bigcup_{t=1}^k(\lambda^t\cap b^n_t) & a^n_{j+1} & \dots \end{pmatrix} =$$

$$= \bigcup_{(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\in\overset{\pm}{P}} (a_1^{\alpha_1}\cap\dots\cap\bigcup_{t=1}^{k}(\lambda^t\cap b_t^{\alpha_j})\cap\dots\cap a_n^{\alpha_n}) =$$

$$= \bigcup_{(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\in\overset{\pm}{P}} (\bigcup_{t=1}^{k}(a_1^{\alpha_1}\cap\dots\cap(\lambda^t\cap b_t^{\alpha_j})\cap\dots\cap a_n^{\alpha_n}) =$$

$$= \bigcup_{(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\in\overset{\pm}{P}} (\bigcup_{t=1}^{k}(\lambda^t\cap(a_1^{\alpha_1}\cap\dots\cap b_t^{\alpha_j}\cap\dots\cap a_n^{\alpha_n})) =$$

$$= \bigcup_{t=1}^{k}(\lambda^t\cap(\bigcup_{(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\in\overset{\pm}{P}}(a_1^{\alpha_1}\cap\dots\cap b_t^{\alpha_j}\cap\dots\cap a_n^{\alpha_n}))) =$$

$$= \bigcup_{t=1}^{k}(\lambda^t \cap \overset{\pm}{\nabla}\begin{pmatrix} \dots & a^1_{j-1} & b^1_t & a^1_{j+1} & \dots \\ \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots \\ \dots & a^n_{j-1} & b^n_t & a^n_{j+1} & \dots \end{pmatrix}).$$

Теперь несложно проверить равенство для следующей разности полуперманентов (правого определителя):

$$\overset{+}{\nabla} A \setminus \overset{-}{\nabla} A =$$

$$= \overset{+}{\nabla} \begin{pmatrix} \dots & a_{j-1}^1 & \bigcup_{t=1}^k (\lambda^t \cap b_t^1) & a_{j+1}^1 & \dots \\ \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots \\ \dots & a_{j-1}^n & \bigcup_{t=1}^k (\lambda^t \cap b_t^n) & a_{j+1}^n & \dots \end{pmatrix} \setminus$$

$$\setminus \overset{-}{\nabla} \begin{pmatrix} \dots & a_{j-1}^1 & \bigcup_{t=1}^k (\lambda^t \cap b_t^1) & a_{j+1}^1 & \dots \\ \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots \\ \dots & a_{j-1}^n & \bigcup_{t=1}^k (\lambda^t \cap b_t^n) & a_{j+1}^n & \dots \end{pmatrix} =$$

$$= (\bigcup_{t=1}^k (\lambda^t \cap \overset{+}{\nabla} \begin{pmatrix} \dots & a_{j-1}^1 & b_t^1 & a_{j+1}^1 & \dots \\ \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots \\ \dots & a_{j-1}^n & b_t^n & a_{j+1}^n & \dots \end{pmatrix}) \setminus$$

$$\setminus (\bigcup_{s=1}^k (\lambda^s \cap \overset{-}{\nabla} \begin{pmatrix} \dots & a_{j-1}^1 & b_s^1 & a_{j+1}^1 & \dots \\ \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots \\ \dots & a_{j-1}^n & b_s^n & a_{j+1}^n & \dots \end{pmatrix}) =$$

$$= \bigcup_{t=1}^k \{[\lambda^t \cap \overset{+}{\nabla} \begin{pmatrix} \dots & a_{j-1}^1 & b_t^1 & a_{j+1}^1 & \dots \\ \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots \\ \dots & a_{j-1}^n & b_t^n & a_{j+1}^n & \dots \end{pmatrix}) \setminus$$

$$\setminus \overset{-}{\nabla} \begin{pmatrix} \dots & a_{j-1}^1 & b_t^1 & a_{j+1}^1 & \dots \\ \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots \\ \dots & a_{j-1}^n & b_t^n & a_{j+1}^n & \dots \end{pmatrix}] \setminus$$

$$\setminus (\bigcup_{s \neq t} (\lambda^s \cap \overset{-}{\nabla} \begin{pmatrix} \dots & a_{j-1}^1 & b_s^1 & a_{j+1}^1 & \dots \\ \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots \\ \dots & a_{j-1}^n & b_s^n & a_{j+1}^n & \dots \end{pmatrix}))\}.$$

Аналогичные вычисления можно провести и для разности (левого определителя). Это позволяет получить следующее включение для определителя:

$$Det \begin{pmatrix} \dots & a_{j-1}^1 & \bigcup_{t=1}^k (\lambda^t \cap b_t^1) & a_{j+1}^1 & \dots \\ \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots \\ \dots & a_{j-1}^n & \bigcup_{t=1}^k (\lambda^t \cap b_t^n) & a_{j+1}^n & \dots \end{pmatrix} \subseteq$$

$$\subseteq \bigcup_{t=1}^k [\lambda^t \cap Det \begin{pmatrix} \dots & a_{j-1}^1 & b_t^1 & a_{j+1}^1 & \dots \\ \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots \\ \dots & a_{j-1}^n & b_t^n & a_{j+1}^n & \dots \end{pmatrix}].$$

Учитывая то, что эту цепочку включений можно продолжить, применяя аналогичные рассуждения к каждому столбцу матрицы A, получим, что

$Det A$ содержится в некоторой линейной комбинации определителей квадратных матриц, построенных из столбцов $B_1, B_2, \dots B_k$. Так как $k < n$, то определители таких матриц содержат одинаковые столбцы, и поэтому равны нулю. Следовательно, $Det A = 0$. Теорема доказана.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Соколов О.Б.*Применение булевых определителей к анализу логических многополюсников // Учен. записки Казан. ун-та. 1963. Т. 123, №6. С. 155–164.

2. *Chesley D.S., Bevis J.H.* Determinants for matrices over lattices //Proc. Roy. Soc. Edinburgh. 1969. A68, № 2. P. 138–144.

3. *Poplin P.L., Hartwig R.E.* Determinantal identities over commutative semirings // Linear Algebra Appl. 2004. № 387. P. 99–132.

4. *Поплавский В.Б.* Ориентированные определители произведения булевых матриц // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2004. Вып. 6. С. 111–114.

5. *Поплавский В.Б.* О равенстве обратных булевых матриц симметрической разности ориентированных присоединенных матриц // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2005. Вып. 7. С. 94–97.

6. *Поплавский В.Б.* О разложимости определителей булевых (0,1)-матриц // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2006. Вып. 8. С. 105–108.

УДК 517.984

Д.В. Поплавский, В.А. Юрко

ОБ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ С УСЛОВИЯМИ РАЗРЫВА ВНУТРИ ИНТЕРВАЛА

В статье исследуется обратная узловая задача для дифференциальных операторов второго порядка на конечном интервале с краевыми условиями Дирихле и условиями разрыва внутри интервала. Доказана теорема единственности решения обратной узловой задачи и приведена конструктивная процедура восстановления потенциала по заданным узловым точкам. Отметим, что некоторые обратные узловые задачи исследовались в [1–3] и других работах. Эти задачи тесно связаны с обратными спектральными задачами (см. [4–5] и литературу в них).

Рассмотрим краевую задачу $L = L(q)$ вида

$$-y'' + q(x)y = \lambda y, \quad x \in (0, T), \tag{1}$$

$$y(0) = y(T) = 0, \tag{2}$$

$$\begin{bmatrix} y \\ y' \end{bmatrix} \left(\frac{T}{2} + 0\right) = A \begin{bmatrix} y \\ y' \end{bmatrix} \left(\frac{T}{2} - 0\right), \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \tag{3}$$

где $q(x)$ – вещественная непрерывная функция, a_{ij} – вещественные числа, $\det A = 1$, $a_{12} = 0$, $a_{11} > 0$. Пусть $S(x, \lambda)$ – решение уравнения (1), удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 0,\ y'(0) = 1$ и условию склейки (3).