$DetA$ содержится в некоторой линейной комбинации определителей квадратных матриц, построенных из столбцов $B_1, B_2, \ldots B_k$. Так как $k < n$, то определители таких матриц содержат одинаковые столбцы, и поэтому равны нулю. Следовательно, $DetA = 0$. Теорема доказана.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Соколов О.Б.*Применение булевых определителей к анализу логических многополюсников // Учен. записки Казан. ун-та. 1963. Т. 123, №6. С. 155–164.

2. *Chesley D.S., Bevis J.H.* Determinants for matrices over lattices //Proc. Roy. Soc. Edinburgh. 1969. A68, № 2. P. 138–144.

3. *Poplin P.L., Hartwig R.E.* Determinantal identities over commutative semirings // Linear Algebra Appl. 2004. № 387. P. 99–132.

4. *Поплавский В.Б.* Ориентированные определители произведения булевых матриц // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2004. Вып. 6. С. 111–114.

5. *Поплавский В.Б.* О равенстве обратных булевых матриц симметрической разности ориентированных присоединенных матриц // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2005. Вып. 7. С. 94–97.

6. *Поплавский В.Б.* О разложимости определителей булевых (0,1)-матриц // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2006. Вып. 8. С. 105–108.

УДК 517.984

Д.В. Поплавский, В.А. Юрко

ОБ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ С УСЛОВИЯМИ РАЗРЫВА ВНУТРИ ИНТЕРВАЛА

В статье исследуется обратная узловая задача для дифференциальных операторов второго порядка на конечном интервале с краевыми условиями Дирихле и условиями разрыва внутри интервала. Доказана теорема единственности решения обратной узловой задачи и приведена конструктивная процедура восстановления потенциала по заданным узловым точкам. Отметим, что некоторые обратные узловые задачи исследовались в [1–3] и других работах. Эти задачи тесно связаны с обратными спектральными задачами (см. [4–5] и литературу в них).

Рассмотрим краевую задачу $L = L(q)$ вида

$$-y'' + q(x)y = \lambda y, \quad x \in (0, T), \tag{1}$$

$$y(0) = y(T) = 0, \tag{2}$$

$$\begin{bmatrix} y \\ y' \end{bmatrix} \left(\frac{T}{2} + 0\right) = A \begin{bmatrix} y \\ y' \end{bmatrix} \left(\frac{T}{2} - 0\right), \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \tag{3}$$

где $q(x)$ – вещественная непрерывная функция, a_{ij} – вещественные числа, $\det A = 1$, $a_{12} = 0$, $a_{11} > 0$. Пусть $S(x, \lambda)$ – решение уравнения (1), удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 0,\ y'(0) = 1$ и условию склейки (3).

При каждом фиксированном x функция $S(x,\lambda)$ является целой по λ порядка $1/2$. Пусть $\lambda = \rho^2,\ \rho = \sigma + i\tau$. При $|\lambda| \to \infty$ равномерно по x имеют место асимптотические формулы:

$$S(x,\lambda) = \frac{\sin \rho x}{\rho} - \frac{\cos \rho x}{2\rho^2} \int_0^x q(t)\,dt + o\left(\frac{1}{\rho^2} \exp(|\tau| x)\right), \quad x < \frac{T}{2}, \tag{4}$$

$$S(x,\lambda) = \left(b^+ \frac{\sin \rho x}{\rho} + b^- \frac{\sin \rho (T-x)}{\rho}\right) +$$

$$+ \left(f_1(x) \frac{\cos \rho x}{2\rho^2} + f_2(x) \frac{\cos \rho (T-x)}{2\rho^2}\right) + o\left(\frac{1}{\rho^2} \exp(|\tau| x)\right), \quad x > \frac{T}{2}, \tag{5}$$

где

$$b^{\pm} = \frac{a_{11} \pm a_{22}}{2}, \quad f_1(x) = -b^+ \int_0^x q(t)\,dt - a_{21},$$

$$f_2(x) = b^- \left(\int_0^x q(t)\,dt - 2\int_0^{T/2} q(t)\,dt\right) + a_{21}.$$

Положим $\Delta(\lambda) := S(T,\lambda)$. Нули $\{\lambda_n\}_{n\geq 1}$ целой функции $\Delta(\lambda)$ совпадают с собственными значениями краевой задачи L. При этом собственные функции имеют вид $y_n(x) = S(x,\lambda_n)$. Из (4), (5) вытекает, что при $|\lambda| \to \infty$ справедлива асимптотическая формула:

$$\Delta(\lambda) = b^+ \left(\frac{\sin \rho T}{\rho} - \omega \frac{\cos \rho T}{2\rho^2} + \frac{\omega_1}{2\rho^2}\right) + o\left(\frac{1}{\rho^2} \exp(|\tau| T)\right), \tag{6}$$

где

$$\omega = \int_0^T q(t)\,dt + \frac{a_{21}}{b^+}, \quad \omega_1 = \frac{b^-}{b^+} \left(\int_0^T q(t)\,dt - 2\int_0^{T/2} q(t)\,dt\right) + \frac{a_{21}}{b^+}.$$

При $n \to \infty$ имеет место асимптотическая формула для собственных значений:

$$\rho_n := \sqrt{\lambda_n} = \frac{\pi n}{T} + \frac{\omega}{2\pi n} + (-1)^{n-1} \frac{\omega_1}{2\pi n} + o\left(\frac{1}{n}\right). \tag{7}$$

Отметим, что собственные значения λ_n и собственные функции $y_n(x)$ являются вещественными, а краевая задача L – самосопряженной. Подставляя (7) в (4), (5), получаем асимптотические формулы для собственных функций при $n \to \infty$ равномерно по x:

$$\rho_n y_n(x) =$$
$$= \sin \frac{\pi n}{T} x + \frac{1}{2\pi n} \left(-T \int_0^x q(t)\, dt + \omega x + (-1)^{n-1} \omega_1 x \right) \cos \frac{\pi n}{T} x + o\left(\frac{1}{n}\right),$$
$$x < \frac{T}{2},$$
$$\rho_n y_n(x) = \bigl(b^+ + (-1)^{n-1} b^-\bigr) \sin \frac{\pi n}{T} x + \frac{1}{2\pi n} \Bigl(T f_1(x) + (-1)^n T f_2(x) +$$
$$+ b^+(\omega + (-1)^{n-1}\omega_1) x + b^-(\omega + (-1)^{n-1}\omega_1)(T - x) \Bigr) \cos \frac{\pi n}{T} x + o\left(\frac{1}{n}\right),$$
$$x > \frac{T}{2}.$$

Для краевой задачи L справедлив аналог теоремы Штурма об осцилляции. Точнее, собственная функция $y_n(x)$ имеет ровно $n-1$ (простых) нулей внутри интервала $(0, T)$: $0 < x_n^1 < \cdots x_n^{n-1} < T$. Положим $X := \{x_n^j\}_{n \ge 2,\, j = \overline{1, n-1}}$ и доопределим $x_n^0 := 0,\ x_n^n := T$.

Обратная узловая задача заключается в построении потенциала $q(x)$ по заданному множеству X узловых точек или некоторой его части. При этом матрица перехода A предполагается известной априори. Так как задание узловых точек определяет $q(x)$ только с точностью до постоянного слагаемого, то не нарушая общности, в дальнейшем считаем, что $\int_0^T q(x)\, dx = 0$.

Обозначим $X_k := \{x_{2m-k}^j\}_{m \ge 1,\, j = \overline{1, 2m-k}}$, $k = 0, 1$. Множества X_k являются всюду плотными на $(0, T)$ и $X_0 \cup X_1 = X$.

Теорема 1. *Зафиксируем $k = 0 \vee 1$ и $x \in (0, T)$. Пусть последовательность $\{x_n^{j_n}\} \in X_k$ выбрана так, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n^{j_n} = x$. Тогда существует конечный предел*

$$G_k(x) := \lim_{n\to\infty} \frac{2\pi^2 n^2}{T^3} \Bigl((x_n^{j_n+1} - x_n^{j_n}) n - T \Bigr), \tag{8}$$

причем

$$G_k(x) = q(x) - \frac{1}{T} \Bigl(\omega - (-1)^k \omega_1 \Bigr).$$

Сформулируем теперь теорему единственности решения обратной узловой задачи. Для этого наряду с L рассмотрим краевую задачу $\tilde{L} = L(\tilde{q})$ того же вида, но с другим потенциалом $\tilde{q}$. Условимся, что если некоторый символ α обозначает объект, относящийся к задаче L, то $\tilde{\alpha}$ обозначает аналогичный объект, относящийся к задаче $\tilde{L}$.

Теорема 2. *Зафиксируем $k = 0 \vee 1$. Пусть $X_k = \tilde{X}_k$. Тогда $q(x) \equiv \equiv \tilde{q}(x)$, $x \in [0, T]$. Таким образом, задание одного из множеств X_0 или X_1 однозначно определяет потенциал $q(x)$ на отрезке $[0, T]$.*

Доказательство теоремы конструктивно и дает процедуру построения искомого потенциала. Точнее, функция $q(x)$ может быть вычислена по формуле

$$q(x) = G_k(x) - \frac{1}{T}\int_0^T G_k(t)\,dt,$$

где $G_k(x)$ определяется формулой (8).

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты 07-01-00003 и 07-01-92000-ННС-а).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *McLaughlin J.R.* Inverse spectral theory using nodal points as data - a uniqueness result // J. Differ. Equat. 1988. Vol. 73. P. 354–362.
2. *Shen C.L., Tsai T.M.* On a uniform approximation of the density function of a string equation using EVs and nodal points and some related inverse nodal problems // Inverse Problems. 1995. Vol. 11, № 5. P. 1113–1123.
3. *Law C.K., Yang C.-F.* Reconstructing the potential function and its derivatives using nodal data // Inverse Problems. 1998. Vol. 14, № 2. P. 299–312.
4. *Yurko V.A.* Method of Spectral Mappings in the Inverse Problem Theory, Inverse and Ill-posed Problems Series. Utrecht: VSP, 2002.
5. *Юрко В.А.* Введение в теорию обратных спектральных задач. М.: Физматлит, 2007.

УДК 519.85

А.Р. Приходько, С.П. Сидоров

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ЛИНЕЙНОЙ УСЛОВНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ В R^n

Пусть $m, n \in N$, $m < n$. Для $v = (v_k)_{k=1}^n, w = (w_k)_{k=1}^n \in R^n$ обозначим $\langle v, w\rangle = \sum_{k=1}^n v_k w_k$. Пусть $A \in R^{m\times n}$, $B \in R^{m\times 1}$. Обозначим

$$\Omega = \{x \in R^n :\ Ax = B\}.$$

Пусть $C_{0,2}$ есть конус положительных, выпуклых и непрерывных на [0,1] функций, то есть

$$C_{0,2} = \{f \in C[0,1] :\ f(t) \geq 0,\ t \in [0,1],\ f[t_1, t_2, t_3] \geq 0,\ \forall\, 0 \leq t_1 < t_2 < t_3 \leq 1\},$$

где $f[t_1, t_2, t_3]$ означает разделенную разность функции f по узлам t_1, t_2, t_3.

Пусть $0 \leqslant x_{1,n} < x_{2,n} < \ldots < x_{n,n} \leqslant 1$, для произвольной $f \in C[0,1]$ положим $If = (f(x_{1,n}), \ldots, f(x_{n,n}))$, $If \in R^n$. Обозначим

$$C_{0,2}^* = \{l \in R^n :\ \langle If, l\rangle \geq 0\ \forall f \in C_{0,2}\}.$$