УДК 519.4, 519.8

В.В. Розен

ПРЕДСТАВЛЕНИЯ СТРУКТУРЫ ПРЕДПОЧТЕНИЙ В ЧИСЛОВУЮ ПРЯМУЮ

1. Структура предпочтений на множестве A может быть задана в виде пары $\langle A, \rho \rangle$, где ρ — рефлексивное бинарное отношение на множестве A. *Представлением структуры предпочтений* $\langle A, \rho \rangle$ *в числовую прямую* $\mathbb{R}$ называется отображение $\varphi: A \to \mathbb{R}$, удовлетворяющее условиям:

$$a_1 \overset{\rho^*}{<} a_2 \quad \Longrightarrow \quad \varphi(a_1) < \varphi(a_2), \tag{1}$$

$$a_1 \overset{\rho^s}{\sim} a_2 \quad \Longrightarrow \quad \varphi(a_1) = \varphi(a_2), \tag{2}$$

где ρ^* — асимметричная, а ρ^s — симметричная часть отношения ρ.

В данной статье найдено необходимое условие существования представления структуры предпочтений в числовую прямую; в случае конечного множества A указанное условие является также достаточным.

2. Следующая теорема дает необходимое условие существования представления структуры предпочтений в числовую прямую.

Теорема 1. *Если структура предпочтений* $\langle A, \rho \rangle$ *имеет представление в числовую прямую, то отношение* ρ *должно быть ацикличным относительно своей симметричной части, то есть при любом* $n = 1, 2, \ldots$ *из соотношений*

$$a_1 \overset{\rho}{\lesssim} a_2 \overset{\rho}{\lesssim} \ldots \overset{\rho}{\lesssim} a_n \overset{\rho}{\lesssim} a_1 \tag{3}$$

должно следовать

$$a_1 \overset{\rho^s}{\sim} a_2 \overset{\rho^s}{\sim} \ldots \overset{\rho^s}{\sim} a_n \overset{\rho^s}{\sim} a_1. \tag{4}$$

Доказательство. Пусть при некотором натуральном n выполнено (3). Тогда для каждого $k = 1, \ldots, n$ имеет место $a_k \overset{\rho^*}{<} a_{k+1}$ или $a_k \overset{\rho^s}{\sim} a_{k+1}$ (полагаем $a_{n+1} \equiv a_1$). Предположим, что для некоторого $l = 1, \ldots, n$ соотношение $a_l \overset{\rho^s}{\sim} a_{l+1}$ не выполнено. Тогда выполняется $a_l \overset{\rho^*}{<} a_{l+1}$, откуда

$$a_1 \overset{\rho}{\lesssim} \ldots \overset{\rho}{\lesssim} a_l \overset{\rho^*}{<} a_{l+1} \overset{\rho}{\lesssim} \ldots \overset{\rho}{\lesssim} a_n \overset{\rho}{\lesssim} a_1.$$

Согласно (1), (2) из последней цепочки соотношений получаем

$$\varphi(a_1) \leq \ldots \leq \varphi(a_l) < \varphi(a_{l+1}) \leq \ldots \leq \varphi(a_n) \leq \varphi(a_1),$$

откуда $\varphi(a_1) < \varphi(a_1)$, что невозможно. Теорема доказана.

3. Перейдем к достаточным условиям существования представлений.

Теорема 2. *Ацикличная структура предпочтений на конечном множестве имеет представление в числовую прямую.*

Доказательство. Пусть $\langle A, \rho \rangle$ — структура предпочтений, где множество A конечно и ρ ациклично. Так как из ацикличности следует антисимметричность, получаем $\rho^s = \Delta_A$, $\rho^* = \rho \backslash \Delta_A$ (где Δ_A — тождественное отношение на A), причем ρ^* будет строго ацикличным. Таким образом, в графе $\langle A, \rho^* \rangle$ отсутствуют контура и петли, а так как множество A конечно, то все пути в графе $\langle A, \rho^* \rangle$ имеют конечную длину и их длины ограничены в совокупности. Для произвольного элемента $a \in A$ полагаем: $h(a)$ — максимальная длина пути в графе $\langle A, \rho^* \rangle$, ведущего в вершину a.

Натуральное число $h(a)$ называется *высотой* элемента a, причем

$$0 \leq h(a) \leq n - 1,$$

где $n = |A|$. Пусть $a_1 \overset{\rho^*}{<} a_2$. Положим $h(a_1) = k_1$. Тогда в графе $\langle A, \rho^* \rangle$ существует путь длины k_1, ведущий в вершину a_1. Добавляя к нему дугу $a_1 \overset{\rho^*}{<} a_2$, получаем путь длины $k_1 + 1$, ведущий в вершину a_2, значит, $h(a_2) \geq k_1 + 1 > k_1 = h(a_1)$, то есть $h(a_1) < h(a_2)$. Показали справедливость импликации

$$a_1 \overset{\rho^*}{<} a_2 \quad \Longrightarrow \quad h(a_1) < h(a_2). \tag{5}$$

Учитывая, что в нашем случае структура предпочтений антисимметрична ($\rho^s = \Delta_A$), имеем очевидное следование:

$$a_1 \overset{\rho^s}{\sim} a_2 \quad \Longrightarrow \quad h(a_1) = h(a_2). \tag{6}$$

Формулы (5) и (6) показывают, что *для ацикличной структуры предпочтений, заданной на конечном множестве, функция высоты h является ее представлением в числовую прямую.*

Теорема 3. *Для того чтобы структура предпочтений $\langle A, \rho \rangle$ на конечном множестве A имела представление в числовую прямую, необходимо и достаточно, чтобы отношение ρ было ацикличным относительно своей симметричной части ρ^s.*

Действительно, необходимость установлена в теореме 1 (даже без предположения конечности множества A). Доказательство достаточности основано на следующем вспомогательном утверждении.

Лемма. *Пусть отношение ρ ациклично относительно своей симметричной части ρ^s. Тогда каноническое отображение из A в A/ε_ρ, где ε_ρ — отношение взаимной достижимости, будет гомоморфизмом структуры предпочтений $\langle A, \rho \rangle$ на фактор-структуру предпочтений $\langle A/\varepsilon_\rho, \rho/\varepsilon_\rho \rangle$.*

Перейдем к доказательству достаточности. Согласно лемме каноническое отображение π из A в A/ε_ρ является гомоморфизмом структуры предпочтений $\langle A, \rho\rangle$ на фактор-структуру предпочтений $\langle A/\varepsilon_\rho, \rho/\varepsilon_\rho\rangle$. Как известно, факторизация отношения по отношению его взаимной достижимости приводит к ациклическому отношению (см. напр. [1]), поэтому фактор-структура $\langle A/\varepsilon_\rho, \rho/\varepsilon_\rho\rangle$ будет ацикличной и по теореме 2 функция высоты h будет ее представлением в числовую прямую. Тогда композиция этих отображений $\varphi = h \circ \pi$ будет представлением структуры предпочтений $\langle A, \rho\rangle$ в числовую прямую.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Миркин Б.Г.* Проблема группового выбора. М.: Наука, 1974.

2. *Розен В.В.* Цель – оптимальность — решение. М.: Радио и связь, 1982.

3. *Розен В.В.* Представления целевой структуры задачи принятия решения в числовую прямую // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2006. Вып. 8. С. 118–121.

УДК 517.927.25

В.С. Рыхлов

О ПОЛНОТЕ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ПУЧКА ВТОРОГО ПОРЯДКА, КОРНИ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ КОТОРОГО ЛЕЖАТ НА ОДНОЙ ПРЯМОЙ

Рассмотрим в пространстве $L_2[0,1]$ пучок операторов $L(\lambda)$, определяемый однородным дифференциальным выражением

$$\ell(y,\lambda) := y^{(2)} + \lambda p_1 y^{(1)} + \lambda^2 p_2 y$$

и двухточечными однородными краевыми условиями

$$U_\nu(y,\lambda) = U_{\nu 0}(y,\lambda) + U_{\nu 1}(y,\lambda) :=$$

$$:= \big(\alpha_{\nu 1} y^{(1)}(0) + \lambda\alpha_{\nu 2} y(0)\big) + \big(\beta_{\nu 1} y^{(1)}(1) + \lambda\beta_{\nu 2} y(1)\big) = 0, \quad \nu = 1, 2,$$

где $p_j, \alpha_{\nu j}, \beta_{\nu j} \in \mathbb{C}$. В случае $\alpha_{\nu 1} = \beta_{\nu 1} = 0$ считаем, что краевое условие имеет вид $\alpha_{\nu 2} y(0) + \beta_{\nu 2} y(1) = 0$.

Обозначим через ω_1, ω_2 корни характеристического уравнения $\omega^2 + p_1\omega + p_2 = 0$ и будем считать, что выполняется основное предположение: *корни ω_1, ω_2 отличны от нуля и лежат на одной прямой, проходящей через начало координат, по разные стороны от этого начала.* Не нарушая общности, можно считать: