Перейдем к доказательству достаточности. Согласно лемме каноническое отображение $\pi$ из $A$ в $A/\varepsilon_\rho$ является гомоморфизмом структуры предпочтений $\langle A, \rho\rangle$ на фактор-структуру предпочтений $\langle A/\varepsilon_\rho, \rho/\varepsilon_\rho\rangle$. Как известно, факторизация отношения по отношению его взаимной достижимости приводит к ациклическому отношению (см. напр. [1]), поэтому фактор-структура $\langle A/\varepsilon_\rho, \rho/\varepsilon_\rho\rangle$ будет ацикличной и по теореме 2 функция высоты $h$ будет ее представлением в числовую прямую. Тогда композиция этих отображений $\varphi = h \circ \pi$ будет представлением структуры предпочтений $\langle A, \rho\rangle$ в числовую прямую.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Миркин Б.Г.* Проблема группового выбора. М.: Наука, 1974.

2. *Розен В.В.* Цель – оптимальность — решение. М.: Радио и связь, 1982.

3. *Розен В.В.* Представления целевой структуры задачи принятия решения в числовую прямую // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2006. Вып. 8. С. 118–121.

УДК 517.927.25

**В.С. Рыхлов**

## О ПОЛНОТЕ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ПУЧКА ВТОРОГО ПОРЯДКА, КОРНИ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ КОТОРОГО ЛЕЖАТ НА ОДНОЙ ПРЯМОЙ

Рассмотрим в пространстве $L_2[0,1]$ пучок операторов $L(\lambda)$, определяемый однородным дифференциальным выражением

$$\ell(y,\lambda) := y^{(2)} + \lambda p_1 y^{(1)} + \lambda^2 p_2 y$$

и двухточечными однородными краевыми условиями

$$U_\nu(y,\lambda) = U_{\nu 0}(y,\lambda) + U_{\nu 1}(y,\lambda) :=$$

$$:= \big(\alpha_{\nu 1} y^{(1)}(0) + \lambda \alpha_{\nu 2} y(0)\big) + \big(\beta_{\nu 1} y^{(1)}(1) + \lambda \beta_{\nu 2} y(1)\big) = 0, \quad \nu = 1, 2,$$

где $p_j, \alpha_{\nu j}, \beta_{\nu j} \in \mathbb{C}$. В случае $\alpha_{\nu 1} = \beta_{\nu 1} = 0$ считаем, что краевое условие имеет вид $\alpha_{\nu 2} y(0) + \beta_{\nu 2} y(1) = 0$.

Обозначим через $\omega_1, \omega_2$ корни характеристического уравнения $\omega^2 + p_1\omega + p_2 = 0$ и будем считать, что выполняется основное предположение: *корни $\omega_1, \omega_2$ отличны от нуля и лежат на одной прямой, проходящей через начало координат, по разные стороны от этого начала.* Не нарушая общности, можно считать:

$\mathbf{1}^0$) $\omega_2 < 0 < \omega_1$.

Обозначим $\tau := |\omega_2|/\omega_1$ (очевидно, $\tau > 0$), $y_1(x,\lambda) = \exp(\lambda\omega_1 x)$, $y_2(x,\lambda) = \exp(\lambda\omega_2 x)$. Для определенности считаем $\alpha_{\nu 1} \neq 0$, $\beta_{\nu 1} \neq 0$. В остальных случаях рассуждения принципиально не отличаются. Введем следующие обозначения: $v_{\nu j} = U_{\nu 0}(y_j,\lambda)/\lambda$, $w_{\nu j} = \exp(-\lambda\omega_j)U_{\nu 1}(y_j,\lambda)/\lambda$, где $\nu, j = 1,2$, и $V_j = (v_{1j}, v_{2j})^T$, $W_j = (w_{1j}, w_{2j})^T$ $(j = 1,2)$. Пусть $a_{sk} = \det(W_s, W_k)$, $a_{\bar{s}k} = \det(V_s, W_k)$, $a_{s\bar{k}} = \det(W_s, V_k)$, $a_{\bar{s}\bar{k}} = \det(V_s, V_k)$.

Характеристический определитель пучка операторов имеет вид

$$\Delta(\lambda) = \det\bigl(U_\nu(y_j,\lambda)\bigr)_{\nu,j=1}^{2} = \\ = \lambda^2\{a_{\bar{1}\bar{2}} + e^{\lambda\omega_1}a_{1\bar{2}} + e^{\lambda\omega_2}a_{\bar{1}2} + e^{\lambda(\omega_1+\omega_2)}a_{12}\} = \lambda^2\Delta_0(\lambda).$$

Предположим, что всюду в дальнейшем выполняется условие

$\mathbf{2}^0$) $a_{\bar{1}\bar{2}} \neq 0$, $a_{1\bar{2}} \neq 0$, $a_{\bar{1}2} = a_{12} = 0$.

При этом условии

$$\Delta_0(\lambda) = a_{\bar{1}\bar{2}} + e^{\lambda\omega_1}a_{1\bar{2}}, \tag{1}$$

и, следовательно, рассматриваемый пучок $L(\lambda)$ не является регулярным [1, с. 66–67] и более того не является нормальным в терминологии работы [2].

Решается задача нахождения условий на параметры пучка $L(\lambda)$, при которых имеет место или отсутствует двукратная полнота системы собственных и присоединенных функций пучка $L(\lambda)$ в пространстве $L_2[0,1]$. При отсутствии такой полноты естественно ставить вопрос о двукратной полноте в пространстве $L_2[0,\sigma]$ при $0 < \sigma < 1$ или об однократной полноте в пространстве $L_2[0,\sigma]$.

Отметим, что в случае $0 < \omega_1 < \omega_2$ и при условиях $a_{1\bar{2}} \neq 0$, $a_{\bar{1}2} \neq 0$, $a_{\bar{1}\bar{2}} = a_{12} = 0$ свойства собственных функций (с.ф.) (однократная полнота и неполнота, минимальность, базисность Рисса) детально исследовались в [3], а при условии $\mathbf{2}^0$ в [4]. В случае же $\mathbf{1}^0$ и $\mathbf{2}^0$, но при дополнительном условии $0 < \omega_1 < |\omega_2|$ до сих пор исследовалась [5] только двукратная полнота системы с.ф. пучка $L(\lambda)$ в пространстве $L_2[0,\sigma]$.

Из (1) следует, что уравнение $\Delta_0(\lambda) = 0$ имеет счетное число корней, которые выражаются формулой

$$\lambda_k = (2k\pi i + d_0)/\omega_1, \qquad k \in \mathbb{Z},$$

где $d_0 := \ln_0 c_0$ ($\ln_0$ есть фиксированная ветвь натурального логарифма, такая что $\ln_0 1 = 0$), $c_0 := -a_{\bar{1}\bar{2}}/a_{1\bar{2}}$.

Обозначим $\Lambda := \{\lambda_k : \ k \in \mathbb{Z}\}$. Очевидно, $\Lambda \setminus \{0\}$ есть множество ненулевых собственных значений (с.з.) пучка $L(\lambda)$. Точка $\lambda = 0$ может быть с.з., а может и не быть, даже если $0 \in \Lambda$.

В качестве порождающей функции для системы с.ф. пучка $L(\lambda)$ возьмем функцию, предложенную в работе [6]:

$$\gamma(x,\lambda,\Gamma) = \begin{vmatrix} 0 & y_1(x,\lambda) & y_2(x,\lambda) \\ -\Gamma & V_1 + e^{\lambda\omega_1}W_1 & V_2 + e^{\lambda\omega_2}W_2 \end{vmatrix}, \qquad \lambda \neq 0,$$

где вектор $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2)^T \neq 0$ является параметром. В [6] исследовалась возможность брать в качестве $\Gamma$ векторы $V_j$ и $W_j$ $(j = 1, 2)$.

Далее будут использоваться альтернативные условия:

$\mathbf{3}^0$) $W_2 \neq 0$ или: $W_2 = 0$ и $a_{1\bar{1}} = 0$;

$\mathbf{4}^0$) $W_2 = 0$ и $a_{1\bar{1}} \neq 0$.

Справедливы следующие леммы о порождающих функциях.

**Лемма 1.** *Если выполняются условия* $\mathbf{1}^0$–$\mathbf{3}^0$, *то функция*

$$y(x,\lambda) := \exp(\lambda\omega_1 x)$$

*является порождающей для системы с.ф. пучка* $L(\lambda)$ *при* $\lambda \neq 0$.

**Лемма 2.** *Если выполняются условия* $\mathbf{1}^0$, $\mathbf{2}^0$ *и* $\mathbf{4}^0$, *то функция*

$$y(x,\lambda) := \exp(\lambda\omega_1 x) + b_0 \exp(\lambda(\omega_1 + \omega_2 x)),$$

*где* $b_0 = a_{1\bar{1}}/a_{\bar{1}\bar{2}} \neq 0$, *является порождающей для системы с.ф. пучка* $L(\lambda)$ *при* $\lambda \neq 0$.

Обозначим $Y_\Lambda := \{y(x,\lambda) : \ \lambda \in \Lambda\}$. Если $\lambda = 0 \notin \Lambda$, то система $Y_\Lambda$ совпадает с системой с.ф. пучка $L(\lambda)$, соответствующих ненулевым с.з..

Из леммы 2 следует, что в случае выполнения условия $\mathbf{3}^0$ система $Y_\Lambda$ совпадает с обычной тригонометрической системой в экспоненциальной форме, и вопрос о полноте системы с.ф. пучка $L(\lambda)$ в пространстве $L_2[0,1]$ в этом случае является тривиальным.

Далее считаем, что выполняется условие $\mathbf{4}^0$. В этом случае

$$y(x,\lambda) := \exp(\lambda\omega_1 x) + b_0 \exp(\lambda(\omega_1 + \omega_2 x)) \quad (b_0 \neq 0).$$

Справедливы следующие теоремы.

**Теорема 1.** *Если выполняются условия* $\mathbf{1}^0$, $\mathbf{2}^0$, $\mathbf{4}^0$ *и* $\sigma = \frac{1}{1+\tau}$, *то система* $Y_\Lambda$ *двукратно полна в пространстве* $L_2[0,\sigma]$ *с возможным дефектом, не превосходящим 1. Если же* $\sigma > \frac{1}{1+\tau}$, *то система* $Y_\Lambda$ *двукратно неполна в пространстве* $L_2[0,\sigma]$ *и имеет в этом пространстве бесконечный дефект относительно двукратной полноты.*

**Теорема 2.** *Если выполняются условия* $\mathbf{1}^0$, $\mathbf{2}^0$, $\mathbf{4}^0$, *то для однократной полноты системы* $Y_\Lambda$ *в пространстве* $L_2[0,\sigma]$ *достаточно выполнения одного из условий:*

*а)* $0 < \sigma \le \min\{1, \frac{1}{\tau}\}$, $0 < \tau < +\infty$*; при* $\tau = 1$ *должно быть* $b_0 \neq \pm 1$*;*

*б)* $|b_0|^2 < \tau$ *в случае* $\frac{1}{\tau} < \sigma \le \frac{2}{1+\tau}$, $\tau > 1$*;*

*в)* $|b_0|^2 \sum\limits_{s=0}^{k} \frac{1}{|c_0|^{2s}} < \tau$ *в случае, если при некотором натуральном* $k$ *выполняются неравенства* $\frac{k+1}{1+\tau} < \sigma \le \min\left\{1, \frac{k+2}{1+\tau}\right\}$, $\tau > k$.

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 06-01-00003).*

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Наймарк М.А.* Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969. 528 с.

2. *Шкаликов А.А.* Краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений с параметром в граничных условиях // Тр. семинара им. И.Г. Петровского. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1983. № 9. С. 190–229.

3. *Рыхлов В.С.* О полноте собственных функций квадратичных пучков обыкновенных дифференциальных операторов // Изв. вузов. Сер. Математика. 1992. Т. 36, № 3. С. 35–44.

4. *Рыхлов В.С.* О свойствах собственных функций обыкновенного дифференциального квадратичного пучка второго порядка // Интегральные преобразования и специальные функции. Инф. бюл. М.: Науч.-исслед. гр. междунар. журн. "Integral Transforms and Special Functions"и ВЦ РАН, 2001. Т. 2, № 1. С. 85–103.

5. *Rykhlov V.S.* О полноте собственных функций пучков обыкновенных дифференциальных операторов // Spectral and Evolution Problems: Proceedings of the Eleventh Crimean Autumn Mathematical School-Symposium. Simferopol. 2001. Vol. 11. P. 86–93.

6. *Rykhlov V.S.* On completeness of eigenfunctions for pencils of differential operators // Spectral and Evolutionary Problems: Proceedings of the Seventh Crimean Autumn Mathematical School-Symposium. Simferopol. 1997. Vol. 7. P. 70–73.

УДК 517.518.85

**С.П. Сидоров**

# ОПТИМАЛЬНАЯ ЛИНЕЙНАЯ ИНТЕРПОЛЯЦИЯ С УСЛОВИЕМ НА АЛГОРИТМ

В последнее время к задачам оптимального восстановления функционалов привлечено повышенное внимание. Достаточно подробный обзор по этой проблематике можно найти в статьях [1, 2], а также в книге [3].

В связи с ростом внимания к формосохраняющему приближению представляет интерес задача оптимальной интерполяции с использованием алгоритмов, которые обладают рядом дополнительных свойств.

Для $f \in C[0,1]$ положим $I_n f = (f(x_1), \ldots, f(x_n))$, где $0 \leqslant x_1 < x_2 < \ldots < x_n \leqslant 1$.

Пусть $V$– некоторый конус в $R^n$. Обозначим $A_n(V)$ класс всех линейных алгоритмов $A : R^n \to R$, удовлетворяющих условию: $A(y) \geqslant 0$ для всякого $y \in V$.