а) $0 < \sigma \le \min\{1, \frac{1}{\tau}\}$, $0 < \tau < +\infty$; *при* $\tau = 1$ *должно быть* $b_0 \ne \pm 1$;

б) $|b_0|^2 < \tau$ *в случае* $\frac{1}{\tau} < \sigma \le \frac{2}{1+\tau}$, $\tau > 1$;

в) $|b_0|^2 \sum\limits_{s=0}^{k} \frac{1}{|c_0|^{2s}} < \tau$ *в случае, если при некотором натуральном* k *выполняются неравенства* $\frac{k+1}{1+\tau} < \sigma \le \min\left\{1, \frac{k+2}{1+\tau}\right\}$, $\tau > k$.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 06-01-00003).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Наймарк М.А.* Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969. 528 с.

2. *Шкаликов А.А.* Краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений с параметром в граничных условиях // Тр. семинара им. И.Г. Петровского. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1983. № 9. С. 190–229.

3. *Рыхлов В.С.* О полноте собственных функций квадратичных пучков обыкновенных дифференциальных операторов // Изв. вузов. Сер. Математика. 1992. Т. 36, № 3. С. 35–44.

4. *Рыхлов В.С.* О свойствах собственных функций обыкновенного дифференциального квадратичного пучка второго порядка // Интегральные преобразования и специальные функции. Инф. бюл. М.: Науч.-исслед. гр. междунар. журн. "Integral Transforms and Special Functions"и ВЦ РАН, 2001. Т. 2, № 1. С. 85–103.

5. *Rykhlov V.S.* О полноте собственных функций пучков обыкновенных дифференциальных операторов // Spectral and Evolution Problems: Proceedings of the Eleventh Crimean Autumn Mathematical School-Symposium. Simferopol. 2001. Vol. 11. P. 86–93.

6. *Rykhlov V.S.* On completeness of eigenfunctions for pencils of differential operators // Spectral and Evolutionary Problems: Proceedings of the Seventh Crimean Autumn Mathematical School-Symposium. Simferopol. 1997. Vol. 7. P. 70–73.

УДК 517.518.85

С.П. Сидоров

ОПТИМАЛЬНАЯ ЛИНЕЙНАЯ ИНТЕРПОЛЯЦИЯ С УСЛОВИЕМ НА АЛГОРИТМ

В последнее время к задачам оптимального восстановления функционалов привлечено повышенное внимание. Достаточно подробный обзор по этой проблематике можно найти в статьях [1, 2], а также в книге [3].

В связи с ростом внимания к формосохраняющему приближению представляет интерес задача оптимальной интерполяции с использованием алгоритмов, которые обладают рядом дополнительных свойств.

Для $f \in C[0,1]$ положим $I_n f = (f(x_1), \dots, f(x_n))$, где $0 \leqslant x_1 < x_2 < \ldots < x_n \leqslant 1$.

Пусть $V-$ некоторый конус в R^n. Обозначим $A_n(V)$ класс всех линейных алгоритмов $A : R^n \to R$, удовлетворяющих условию: $A(y) \geqslant 0$ для всякого $y \in V$.

Определим относительную погрешность $e(W, I_n, V)$ задачи условной линейной интерполяции на классе действительнозначных на $[0,1]$ функций W на основе информации $I_n f$ с ограничением V следующим образом:

$$e(W, I_n, V) := \inf_{A \in A_n(V)} \sup_{f \in W} |Uf - A(I_n f)|.$$

Обозначим $e_r(x) = x^r$, $r = 0, 1, \ldots$, и положим

$$P_2 = \left\{ f = \sum_{r=0}^{2} a_r e_r : \ \|f''\|_{C[0,1]} \leqslant 1 \right\}.$$

В настоящей статье оценивается относительная погрешность задачи $e(P_2, I_n, V)$ с ограничением

$$V = R_+^n := \{ l = (l_k)_{k=1}^n \in R^n : \ l_k \geqslant 0, \ k = 1, \ldots, n \}.$$

Для $a = (a_k)_{k=1}^n, b = (b_k)_{k=1}^n \in R^n$ обозначим $\langle a, b \rangle = \sum_{k=1}^n a_k b_k$.

Теорема. *Пусть* $I_n f = (f(x_1), \ldots, f(x_n))$ *и* $\zeta \in [0,1]$ *таково, что для некоторого* $1 \leqslant k \leqslant n-1$ *будет* $x_k < \zeta < x_{k+1}$. *Тогда*

$$e(P_2, I_n, R_+^n) = \frac{1}{2}(x_{k+1} - \zeta)(\zeta - x_k).$$

Доказательство. Для всякого алгоритма $A \in A(R_+^n)$ найдется вектор $l = (l_{k,n})_{k=1}^n \in R_+^n$, такой что $A(I_n f) = \langle I_n f, l \rangle$ для всех $f \in C[0,1]$.

Если для некоторого $1 \leqslant k \leqslant n$ будет $x_k = \zeta$, то получим равенство $e(W, I_n, R_+^n) = 0$. Исключим этот случай из рассмотрения, предположив, что $x_k \neq \zeta$, $k = 1, \ldots, n$.

Имеем

$$\begin{aligned} e(P_2, I_n, R_+^n) &= \inf_{A \in A(R_+^n)} \sup_{f \in P_2} |f(\zeta) - A(I_n f)| = \\ &= \inf_{l \in R_+^n} \sup_{a_1, a_2 \in R, \ |a_2| \leqslant \frac{1}{2}} \left| \sum_{r=0}^{2} a_r e_r(\zeta) - \sum_{r=0}^{2} a_r \langle I_n e_r, l \rangle \right| = \\ &= \inf_{l \in R_+^n} \sup_{a_1, a_2 \in R, \ |a_2| \leqslant \frac{1}{2}} \left| \sum_{r=0}^{2} a_r \left(e_r(\zeta) - \langle I_n e_r, l \rangle \right) \right| = \\ &= \inf_{l \in R_+^n} \sup_{a_1, a_2 \in R, \ |a_2| \leqslant \frac{1}{2}} \sum_{r=0}^{2} |a_r| \left| e_r(\zeta) - \langle I_n e_r, l \rangle \right| = \\ &= \frac{1}{2} \ \inf \ \left| e_2(\zeta) - \langle I_n e_2, l \rangle \right|, \end{aligned}$$

где инфимум ищется среди всех $l \in R_+^n$, удовлетворяющих условиям $\langle I_n e_r, l\rangle = e_r(\zeta),\ r = 0, 1$.

Для $s \in \{-1, 1\}$, $\zeta \in [0, 1]$ рассмотрим задачу линейного программирования

$$G^{s,\zeta}(u) = G^{s,\zeta}(l, y) = s\left(\langle I_n e_2, l\rangle - e_2(\zeta)\right) \to \min_{u \in D}, \tag{1}$$

где $D \subset R^{n+1}$ есть множество всех $u = (l, y) = (l_1, \ldots, l_n, y)$, удовлетворяющих условиям

$$\begin{cases} s\left(\langle I_n e_2, l\rangle - e_2(\zeta)\right) - y = 0, \\ \langle I_n e_r, l\rangle = e_r(\zeta),\ r = 0, 1, \\ l \in R_+^n,\ y \geqslant 0. \end{cases} \tag{2}$$

Будем использовать терминологию и факты теории линейного и выпуклого программирования [4]. Множеством допустимых планов задачи (1), (2) является множество точек, удовлетворяющих системе ограничений (2). Обозначим $G_{min}^{s,\zeta}$ решение задачи $G^{s,\zeta}(u) \to \min_{u \in D}$. Если для некоторых s, ζ множество допустимых планов задачи $G^{s,\zeta}(u) \to \min_{u\in D}$ будет пустым, полагаем $G_{min}^{s,\zeta} = +\infty$. Имеем

$$e(W, I_n, A_+) = \frac{1}{2}\ \min_{s \in S} G_{min}^{s,\zeta}. \tag{3}$$

Оценим правую часть равенства (3). Известно, что решение задачи $G^{s,\zeta}(u) \to \min_{u\in D}$ достигается в одном из базисных планов множества допустимых планов (если оно не пусто), и этот базисный план определяется выбором трех базисных столбцов матрицы системы (2).

Найдем значение целевой функции $G^{s,\zeta}$ в каждом из базисных планов. Тогда $G_{min}^{s,\zeta}$ будет равно наименьшему из этих значений.

Заметим, что базисный план $u^* = (l_1^*, \ldots, l_n^*, y^*)$ (2) не может определяться выбором базисных столбцов k_1, k_2, k_3 для некоторых $1 \leqslant k_1 < k_2 < k_3 \leqslant n$. В этом случае числа $l_{k_1}, l_{k_2}, l_{k_3}$ будут удовлетворять системе линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{i=1}^{3} e_r(x_{k_i}) l_{k_i} = e_r(\zeta),\ r = 0, 1, 2. \tag{4}$$

Так как функции e_0, e_1, e_2 образуют систему Чебышева, решение системы (4) существует и единственно, но для одного из $i = 1, 2, 3$ будет $l_{k_i} < 0$, что противоречит условию положительности $l_k \geqslant 0,\ k = 1, \ldots, n$.

Таким образом, базисный план $u^* = (l_1^*, \ldots, l_n^*, y^*)$ будет определяться выбором базисных столбцов $k_1, k_2, n+1$ для некоторых $1 \leqslant k_1 < k_2 \leqslant n$. Тогда числа l_{k_1}, l_{k_2} будут удовлетворять системе

$$\sum_{i=1}^{2} e_r(x_{k_i}) l_{k_i} = e_r(\zeta),\ r = 0, 1. \tag{5}$$

Заметим, что решения системы (5) l_{k_1}, l_{k_2} будут неотрицательны только если $x_{k_1} \leqslant \zeta \leqslant x_{k_2}$. Решением системы (5) являются числа $l_{k_1} = (x_{k_2} - \zeta)/(x_{k_2} - -x_{k_1})$, $l_{k_2} = (\zeta - x_{k_1})/(x_{k_2} - x_{k_1})$, при этом $G^{s,\zeta}(u^*) = (x_{k_2} - \zeta)(\zeta - x_{k_1})$.

Так как $x_k < \zeta < x_{k+1}$, то $\min_{s\in S} G^{s,\zeta}_{min} = (x_{k+1} - \zeta)(\zeta - x_k)$. Теорема доказана.

Следствие. *Пусть $I_n f = (f(x_1), \ldots, f(x_n))$ и $\zeta \in [0,1]$ таково, что для некоторого $1 \leqslant k \leqslant n-1$ будет $x_k < \zeta < x_{k+1}$. Пусть множество $F \subset \subset C[0,1]$ таково, что $P_2 \subset F$. Тогда*

$$e(F, I_n, R^n_+) \geq \frac{1}{2}(x_{k+1} - \zeta)(\zeta - x_k).$$

Обозначим $W^m_\infty[0,1] := \{f \ : \ f^{(m-1)}$ — абс. непр. на $[0,1]$, $\|f^{(m)}\|_{C[0,1]} \leq \leq 1\}$. Так как $P_2 \subset W^2_\infty[0,1]$, то $e(W^2_\infty[0,1], I_n, R^n_+) \geq \frac{1}{2}(x_{k+1} - \zeta)(\zeta - x_k)$.

Работа выполнена при финансовой поддержке грантов РФФИ (проекты № 07-01-00167-а и № 06-01-00003).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Micchelli C.A., Rivlin T.J.* Optimal estimation in approximation theory. Ch. A survey of optimal recovery. N.Y.: Plenum Press, 1977. P. 1–54.

2. *Micchelli C.A., Rivlin T.J.* Lectures Notes in Mathematics. Ch. Lectures on optimal recovery. Berlin: Springer-Verlag, 1985. P. 21–93.

3. *Трауб Дж., Вожьняковский Х.* Общая теория оптимальных алгоритмов. М.: Мир, 1983.

4. *Дудов С. И., Сидоров С. П.* Курс математической экономики. Ч. 1. Финансовая математика, оптимизация и их приложения. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2002.

УДК 517.51

А.Ю. Трынин

ОБ ОДНОМ ИНТЕГРАЛЬНОМ ПРИЗНАКЕ СХОДИМОСТИ ПРОЦЕССОВ ЛАГРАНЖА – ШТУРМА – ЛИУВИЛЛЯ

Пусть $Y = \{y_n\}_{n=1}^\infty$ — система непрерывно дифференцируемых на отрезке $[a,b]$ функций. Причем, каково бы ни было $n \in N$, функция y_n имеет на $[a,b]$ ровно n простых нулей $a \leq x_{1,n} < x_{2,n} < \ldots < x_{n,n} \leq b$. Для любого натурального n и любой функции f, определённой на $[a,b]$, положим

$$L^Y_n(f,x) = \sum_{k=1}^n \frac{y_n(x)}{y'_n(x_{k,n})(x - x_{k,n})} f(x_{k,n}) = \sum_{k=1}^n l^{\,Y}_{k,n}(x) f(x_{k,n}). \qquad (1)$$

В качестве системы Y возьмем последовательность собственных функций u_n задачи Штурма – Лиувилля на $[0,\pi]$ с непрерывным потенциалом ограниченной вариации и краевыми условиями третьего рода, из которых