УДК 517.984

А.П. Хромов

О ПОЛНОТЕ СИСТЕМЫ СОБСТВЕННЫХ И ПРИСОЕДИНЕННЫХ ФУНКЦИЙ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА С ИНВОЛЮЦИЕЙ

Рассмотрим следующий функционально-дифференциальный оператор L:

$$l[y] = ay'(x) + y'(1-x) + p_1(x)y(x) + p_2(x)y(1-x), \quad x \in [0,1], \tag{1}$$

$$U(y) = \int_0^1 y(x)\,d\sigma(x) = 0. \tag{2}$$

Здесь $a^2 \neq 1$, $p_k(x) \in C^1[0,1]$, $\sigma(x)$ — функция ограниченной вариации, подчиненная следующему условию регулярности:

$$(\beta^2 - \gamma^2\alpha^2)(\alpha^2 - \gamma^2\beta^2) \neq 0, \tag{3}$$

где $\alpha = \sigma(+0) - \sigma(0)$, $\beta = \sigma(1) - \sigma(1-0)$, $\gamma = a - d^{-1}$, $d = (a^2-1)^{-1/2}$.

Оператор (1) является простейшим дифференциальным оператором первого порядка, содержащим оператор отражения $Sf(x) = f(1-x)$. Такие операторы имеют давнюю историю и находят важные применения, в частности, при изучении спектральных свойств интегральных операторов с ядрами, разрывными на диагоналях [1].

Обозначим через $R_\lambda = (L - \lambda E)^{-1}$, где λ — спектральный параметр, E — единичный оператор, резольвенту оператора L.

Введем оператор отражения S: если $f(x)$ скалярная функция, то $Sf = f(1-x)$, если $f(x) = (f_1(x), f_2(x))^T$ (т — знак транспонирования), то $Sf = (f_1(x), f_2(1-x))^T$, если $f(x) = \begin{pmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) \\ f_{21}(x) & f_{22}(x) \end{pmatrix}$, то $Sf(x) = \begin{pmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) \\ f_{21}(1-x) & f_{22}(1-x) \end{pmatrix}$.

Рассмотрим следующую задачу для системы Дирака:

$$v' + P(x)v - \lambda Dv = m(x), \tag{4}$$

$$\int_0^1 S(\Gamma v(t))\,d\sigma(t) = 0, \tag{5}$$

где $v = (v_1, v_2)^T$, $P(x) = D\Gamma^{-1}P_1(x)\Gamma$, $D = \mathrm{diag}\,(d, -d)$, $\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & \gamma \\ \gamma & 1 \end{pmatrix}$, $P_1(x) = S\begin{pmatrix} p_1(x) & p_2(x) \\ p_2(x) & p_1(x) \end{pmatrix}$, $m = D\Gamma^{-1}S(f(x), f(x))^T$.

Исследование этой краевой задачи методами статей [2, 3] приводит к следующим фактам.

Лемма 1. *Имеет место формула*

$$R_\lambda f = v_1(x,\lambda) + v_2(x,\lambda), \tag{6}$$

где $v_j(x,\lambda)$ — компоненты решения $v(x,\lambda)$ задачи (4)–(5).

Обратно, если $v(x,\lambda)$ есть решение (4)–(5) *и соответствующая однородная краевая задача имеет только нулевое решение, то R_λ существует и выполняется* (6).

Лемма 2. *В области S_δ, получающейся из комплексной λ-плоскости удалением всех собственных чисел λ_k вместе с круговыми окрестностями одного и того же радиуса $\delta > 0$, имеет место оценка*

$$\|R_\lambda f\|_\infty = O\left(\left(\varkappa(|\mathrm{Re}\,\lambda d|) + \frac{1}{|\lambda|^2}\right)\|f\|_\infty\right),$$

где $\varkappa(x) = \frac{1}{x}(1 - e^{-x})$ при $x \geq 0$.

Введем в рассмотрение следующее множество функций:

$$M = \{f(x)|\, f(x) \in C[0,1],\ U(f) = 0\}.$$

Лемма 3. *Множество M всюду плотно в $L_2[0,1]$.*

Доказательство. Найдем сначала представление класса M. Пусть α такое, что $\int\limits_0^1 e^{\alpha x}\,d\sigma(x) \neq 0$. Такое α существует, так как в противном случае по теореме Вейерштрасса $\int\limits_0^1 f(x)\,d\sigma(x) = 0$ для любой $f(x) \in C[0,1]$ и, следовательно, $\sigma(x) = \mathrm{const}$, но это противоречит (3).

Найдем теперь представление класса M. Пусть α такое, что $\int\limits_0^1 e^{\alpha x}\,d\sigma(x) = 1$ (что всегда можно получить, за счет умножения $\sigma(x)$ на надлежащую постоянную).

Рассмотрим краевую задачу

$$f' - \alpha f = g, \quad U(f) = 0. \tag{7}$$

Ее решение есть

$$f(x) = \int\limits_0^x e^{\alpha(x-t)} g(t)\,dt - e^{\alpha x} U\left(\int\limits_0^t e^{\alpha(t-\tau)} g(\tau)\,d\tau\right). \tag{8}$$

Это и есть нужное представление M.

Пусть теперь $\psi(x)$ ортогональна M. Тогда из (8) получаем

$$\int\limits_0^1 e^{-\alpha t} g(t)\,dt \int\limits_t^1 e^{\alpha x}\overline{\psi}(x)\,dx - b\int\limits_0^1 e^{-\alpha t} g(t)\,dt \int\limits_t^1 e^{\alpha x}\,d\sigma(x) = 0, \tag{9}$$

где $b = \int\limits_0^1 e^{\alpha x}\overline{\psi}(x)\,dx$. В силу произвольности $g(x)$ из (9) получаем

$$\int\limits_t^1 e^{\alpha\tau}\overline{\psi}(\tau)\,d\tau - b\int\limits_t^1 e^{\alpha\tau}\,d\sigma(\tau) = 0. \tag{10}$$

Так как $\int\limits_t^1 e^{\alpha\tau}\,d\sigma(\tau)$ в силу (3) имеет разрывы, то $b = 0$. Тогда из (10) получаем, что $\psi(x) = 0$ почти всюду. Лемма доказана.

Теорема. *Система собственных и присоединенных функций оператора L полна в $L_2[0,1]$.*

Доказательство. По лемме 3 достаточно доказать, что всякая функция $f(x) \in M$ разлагается в равномерно сходящийся ряд по собственным и присоединенным функциям оператора L. Пусть $f(x) \in M$. Тогда из $Lf - \lambda_0 f = Lf - \lambda f + (\lambda - \lambda_0)f$, где λ_0 – не собственное число, получаем $R_\lambda f = -\frac{f}{\lambda-\lambda_0} + \frac{1}{\lambda-\lambda_0}R_\lambda g$, где $g = Lf - \lambda_0 f$. Отсюда

$$-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda|=r} R_\lambda f\,d\lambda = f(x) + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda|=r}\frac{1}{\lambda-\lambda_0}R_\lambda g\,d\lambda. \tag{11}$$

По лемме 2

$$\Big\|\int\limits_{|\lambda|=r}\frac{1}{\lambda-\lambda_0}R_\lambda g\,d\lambda\Big\|_\infty = O\left(\frac{\ln r}{r}\right). \tag{12}$$

Из (11) и (12) получаем утверждение леммы.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 06-01-00003).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Бурлуцкая М.Ш., Курдюмов В.П., Луконина А.С., Хромов А.П.* Функционально-дифференциальный оператор с инволюцией // Докл. РАН. 2007. № 4. С. 1–4.

2. *Корнев В.В., Хромов А.П.* О равносходимости разложений по собственным функциям интегральных операторов с ядрами, допускающими разрывы производных на диагоналях // Мат. сб. 2001. Т. 192, № 10. С. 33–50.

3. *Хромов А.П.* О равносходимости разложений по собственным функциям интегральных операторов с переменными пределами интегрирования // Интегральные преобразования и специальные функции: Инф. бюл. 2006. Т. 6, № 1. С. 46–55.