Используя соотношение из [2, с.139]

$$(k+1)\sum_{i=1}^{l} i(i+1)\ldots(i+k-1) = l(l+1)\ldots(l+k),$$

получаем

$$\mu_{k'}^{\geq}(r) = \frac{1}{k!}\cdot\frac{1}{k+1} r(r+1)\ldots(r+(k+1)-1) = \frac{1}{k'!} r(r+1)\ldots(r+k'-1).$$

Теорема доказана.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Трахтенброт Б.А., Барздинь Я.М.* Конечные автоматы (поведение и синтез). М.: Наука, 1970.

2. *Бронштейн И.Н., Семендяев К.А.* Справочник по математике для инженеров и учащихся вузов. М.: Наука, 1986.

УДК 517.984

А.А. Чурикова

О БАЗИСЕ РИССА ИЗ СОБСТВЕННЫХ И ПРИСОЕДИНЕННЫХ ФУНКЦИЙ ИНТЕГРАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА С ЯДРОМ, РАЗРЫВНЫМ НА ЛОМАНОЙ

В статье рассматривается вопрос о базисе Рисса из собственных и присоединенных функций (с.п.ф.) оператора

$$y = Af = \int_0^1 A(x,t)f(t)\,dt. \tag{1}$$

Считаем, что $A(x,t) = 1$ при $\{0 \le t \le x, 0 \le x \le 1/2\} \cup \{0 \le t \le 1/2, 1/2 \le x \le 1\} \cup \{1/2 \le t \le 3/2 - x, 1/2 \le x \le 1\}$ и $A(x,t) = 0$ при остальных x и t. При этом предполагаем, что $f(x) \in L_2[0,1]$.

Таким образом, ядро $A(x,t)$ разрывно на ломаной. Для операторов вида (1) с ядрами, разрывными на произвольных ломаных, в [1] получены теоремы равносходимости. В данной статье устанавливается, что с.п.ф. оператора (1) образуют базис Рисса в $L_2[0,1]$.

Теорема 1. *Если $y = R_\lambda(A)f = (E-\lambda A)^{-1}Af$ (λ — спектральный параметр), то имеет место*

$$v'(x) = \lambda\tilde{D}v(x) + \tilde{D}\tilde{m}(x), \quad x \in [0,1/2], \tag{2}$$

$$P_0 v(0) + P_1 v(1/2) = 0, \tag{3}$$

где $v(x) = (v_1^T(x), v_2^T(x))^T$, $v_1(x) = (v_{11}(x), v_{12}(x))^T = (y(x), y(x+\frac{1}{2}))^T$, $v_2(x) = (v_{21}(x), v_{22}(x))^T = (y(\frac{1}{2}-x),\ y(1-x))^T$, $\tilde{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\tilde{m}(x) = (\tilde{m}_1^T(x), \tilde{m}_2^T(x))^T$, $\tilde{m}_1(x) = (f(x), f(x+\frac{1}{2}))^T$, $\tilde{m}_2(x) = (f(\frac{1}{2}-x), f(1-x))^T$, $P_0 = \begin{pmatrix} Q_1 & Q_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ Q_2 & Q_1 \end{pmatrix}$, $Q_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $Q_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Обратно, если $v(x)$ удовлетворяет (2), (3), а соответствующая однородная система имеет только нулевое решение, то $R_\lambda(A)f$ существует и $R_\lambda(A) = v_{1k}(x - \frac{k-1}{2})$ при $x \in [\frac{k-1}{2}, \frac{k}{2}]$, $k = 1, 2$.

Лемма 1. *При $x \in [0, 1/2]$ все с.п.ф. оператора A равны нулю.*

В связи с этим целесообразно считать $f(x) = 0$ при $x \in [0, 1/2]$.

Все дальнейшие рассуждения должны проводиться на $[1/2, 1]$, поэтому для удобства перейдем от $[1/2, 1]$ к $[0, 1]$.

Лемма 2. *Если $v(x)$ удовлетворяет (2), (3), $f(x) = 0$ при $x \in [0, 1/2]$, то имеет место*

$$w'(x) - \mu D w(x) = m(x),\ x \in [0, 1] \tag{4}$$

$$S(\Gamma w(1)) = 0, \tag{5}$$

где $\mu = (\lambda i)/2$, $D = diag(1, -1)$, $w(x) = (w_1(x), w_2(x))^T = \Gamma(v_{12}(\frac{x}{2}), v_{22}(\frac{x}{2}))^T$, $m(x) = iD\Gamma^{-1}S(p(x), p(x))^T$, $S(p(x), p(x))^T = (p(x), p(1-x))^T$, $p(x) = \frac{1}{2}f(\frac{x+1}{2})$, $\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$.

Лемма 3. *Если $y = R_\lambda(A)f$, $f(x) = 0$ при $x \in [0, 1/2]$, то $R_\lambda(A)f = 0$ при $x \in [0, 1/2]$ и $R_\lambda(A)f = \frac{1}{2}(w_1(2x-1) + iw_2(2x-1))$ при $x \in [1/2, 1]$.*

Обозначим $\mu_k = (k - 1/2)\pi i$, $k = 1, 2, \ldots$, и введем в рассмотрение полуполосу $\Pi = \{\mu : |Re\mu| \le h, Im\mu \ge 0\}$, $h > 0$. Удалим из Π все μ_k вместе с круговыми окрестностями радиуса δ. Получившуюся область обозначим через $\Pi(\delta)$, а через $\Pi_1(\delta)$ — часть $\Pi(\delta)$, когда $Re\mu \ge 0$.

Тогда если $\mu \in \Pi_1(\delta)$ и $|\mu|$ достаточно велико, то существует единственное решение задачи (4)–(5), для компонент которого имеет место представление

$$
\begin{aligned}
(w_\mu m)_1 = \ & \int\limits_x^1 \gamma_1 e^{\mu(x-t)} f(\tfrac{1+t}{2})\,dt + \int\limits_0^{1-x} \delta_1 e^{\mu(x+t-1)} f(\tfrac{1+t}{2})\,dt + \\
& + w_1(f,\mu) e^{\mu(x-1)}, \\
(w_\mu m)_2 = \ & \int\limits_0^x \gamma_2 e^{-\mu(x-t)} f(\tfrac{1+t}{2})\,dt + \int\limits_{1-x}^1 \delta_2 e^{-\mu(x+t-1)} f(\tfrac{1+t}{2})\,dt + \\
& + w_2(f,\mu) e^{-\mu x},
\end{aligned}
$$

где $w_i(f,\mu)$ – линейные комбинации с ограниченными по μ коэффициентами интегралов $\int\limits_0^1 \varphi(t)e^{-\mu t}\,dt$, где $\varphi(t)$ являются следующими функциями: $\theta f(\frac{1+t}{2})$ и $\theta f(1-\frac{t}{2})$, θ – произвольное число среди чисел $\gamma_1 = -i/2$, $\gamma_2 = 1/2$, $\delta_1 = 1/2$, $\delta_2 = -i/2$. При $\mathrm{Re}\mu < 0$ имеют место аналогичные формулы.

Обозначим через $\sigma(x,\mu_1,k)$ одну из функций $e^{-(\mu_1+ik)x}$, $e^{(\mu_1+ik)(x-1)}$, через $\omega(x,t,\mu_1,k)$ – одну из функций $\varepsilon(x,t)\theta e^{-(\mu_1+ik)(x-t)}$, $\varepsilon(t,x)\theta e^{(\mu_1+ik)(x-t)}$, $\varepsilon(1-x,t)\theta e^{(\mu_1+ik)(x+t-1)}$, $\varepsilon(t,1-x)\theta e^{-(\mu_1+ik)(x+t-1)}$, где θ те же, что и выше, $\varepsilon(x,t) = 1$ при $x \ge t$ и $\varepsilon(x,t) = 0$ при $x < t$.

Пусть $A_k f = \int\limits_0^1 \sigma(x,\mu_1,k)\sigma(t,\mu_1,k)\tilde{A}f(t)\,dt$, где либо $\tilde{A}f = \theta f(\frac{1+t}{2})$, либо $\tilde{A}f = \theta f(1-\frac{t}{2})$; $B_k f = \int\limits_0^1 \omega(x,t,\mu_1,k) f(\frac{1+t}{2})\,dt$. Пусть $\mu \in \Pi_1(\delta)$, $\mu = \mu_1 + ik$, μ_1— принадлежит ограниченной области.

Лемма 4. *Если $f(x) \in L_2[0,1]$, то при больших $|\mu|$ и $f(x) = 0$ при $x \in [0,1/2]$ имеет место*

$$
R_{-2i\mu} f|_{\mu=\mu_1+ik} = \Omega(x,\mu_1,k;f),
$$

где $\Omega(x,\mu_1,k;f)$ – конечная сумма с ограниченными по μ_1 и k коэффициентами всевозможных операторов $A_k f$ и $B_k f$, причем коэффициенты при $B_k f$ не зависят от μ_1 и k.

Обозначим $\widetilde{\Gamma} = \{\mu | \{|\mathrm{Re}\mu| \le h, \mathrm{Im}\mu = 0\} \cup \{\mathrm{Re}\mu = h, 0 \le \mathrm{Im}\mu \le \pi\} \cup \cup \{|\mathrm{Re}\mu| \le h, \mathrm{Im}\mu = \pi\} \cup \{\mathrm{Re}\mu = -h, 0 \le \mathrm{Im}\mu \le \pi\}$. И рассмотрим $\Gamma_k = \widetilde{\Gamma} + k\pi i$, $k = 1,2,\ldots$ Заметим, что внутри каждого Γ_k лежит только одно μ_k вместе с круговой окрестностью радиуса δ и Π представляется в виде объединения Γ_k. Аналогичное построение проводится и для полуполосы $\{\mu : |\mathrm{Re}\mu| \le h, \mathrm{Im}\mu \le 0\}$. Построенные контуры также обозначим через Γ_k, $k = -1,-2,\ldots$

Справедлива следующая лемма:

Лемма 5. *Пусть I – любой конечный набор достаточно больших по модулю целых чисел. Тогда имеет место равномерная по I оценка*

$$
\Big\| \sum_{k\in I} \int\limits_{\Gamma_k} R_{-2i\mu} f\,d\mu \Big\| \le c.
$$

Лемма 6. *Система с.п.ф. оператора A является полной в $L_2[0,1]$.*

Теорема 2. *Система с.п.ф. оператора A образует базис Рисса в $L_2[0,1]$.*

Утверждение теоремы 2 следует из лемм 5 и 6 по теореме Банаха – Штейнгауза.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 03-8570-34).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Хромов А.П.* Интегральные операторы с ядрами, разрывными на ломаных линиях // Мат. сб. 2006. Т. 197, №11. С. 115–142.

УДК 517.51

А.В. Шаталина

ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫЕ ПРОЦЕССЫ В ОДНОСВЯЗНОЙ ОБЛАСТИ

Пусть D – ограниченная односвязная область с гладкой границей Г. AC – множество аналитических в D и непрерывных в $\overline{D}$ функций с равномерной нормой и обычным модулем непрерывности $\omega(f,\delta)$.

Функция $z=\varphi(w)$ однолистно и конформно отображает внешность единичного круга $|W|>1$ на дополнение области D до расширенной плоскости так, что бесконечно удаленные точки переходят друг в друга, причем $\varphi'(\infty)>0$. $M=\{z_{k,n}\}$ – матрица узлов интерполирования, $M\in\Gamma$, $k=0,1,\ldots,n-1$; $n=1,2,\ldots$

Определение. *Матрица будет называться правильной, если узлы $z_{k,n}$ любой n-й строки при отображении $W_{k,n}=\varphi^{-1}(z_{k,n})$ переходят в вершины правильного n-угольника, вписанного в единичный круг.*

Назовем функцию $\omega(\delta)$ *мажорантой модуля непрерывности*, если $\omega(\delta)$ – непреывная, полуаддитивная и неубывающая на $[0,\infty)$, причем $\omega(0)=0$. Множество таких функций обозначим через Ω. Для каждой фиксированной $\omega(\delta)\in\Omega$ построим классы функций:

$$AC(\omega)=\{f(z);f(z)\in AC,\omega(f,\delta)=\underline{O}\{\omega(\delta)\}\};$$

$$AC^*(\omega)=\{f(z);f(z)\in AC,\omega(f,\delta)=\bar{o}\{\omega(\delta)\}\}.$$

Пусть $\{L_n(M,f,z)\}$ – последовательность интерполяционных многочленов Лагранжа, интерполирующих функцию $f(z)$ в узлах $z_{k,n}$.

При изучении аппроксимативных свойств процесса Лагранжа в случае единичного круга для функций из классов, заданных мажорантой модулей непрерывности, ранее были найдены необходимые и достаточные условия равномерной сходимости последовательностей полиномов к функции в