УДК 517.984

В.А. Юрко

О ПУЧКАХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ НА ПРОСТРАНСТВЕННЫХ СЕТЯХ

В статье исследуется обратная задача спектрального анализа для пучков дифференциальных операторов, заданных на пространственных сетях (геометрических графах). Применяемый метод позволяет решать обратные задачи для широкого класса графов. Так как различные классы графов требуют различной техники, то для упрощения выкладок мы ограничимся дифференциальными уравнениями на деревьях (т.е. на графах без циклов).

Рассмотрим компактное связное дерево T в $\mathbf{R^m}$ с корнем v_0, множеством вершин $V = \{v_0, \dots, v_r\}$ и множеством ребер $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_r\}$. Предположим, что длина каждого ребра равна 1. Вершина называется *граничной*, если она принадлежит только одному ребру. Такое ребро называется *граничным*. Все остальные вершины и ребра называются *внутренними*. Без ограничения общности считаем, что v_0 является граничной вершиной.

Для двух точек $a, b \in T$ будем писать $a \leq b$, если a лежит на единственном простом пути, соединяющем корень v_0 с b; пусть $|b|$ обозначает длину этого пути. Будем писать $a < b$, если $a \leq b$ и $a \neq b$. Отношение $<$ определяет частичную упорядоченность на T. Если $a < b$, то обозначим $[a, b] := \{z \in T : \ a \leq z \leq b\}$. В частности, если $e = [v, w]$ – ребро, то мы будем называть v его *начальной точкой*, w – его *конечной точкой*, и будем говорить, что e выходит из v и заканчивается в w. Для каждой внутренней вершины v обозначим через $R(v) := \{e \in \mathcal{E} : \ e = [v, w], \ w \in V\}$ множество ребер, выходящих из v. Для любой $v \in V$ число $|v|$ является целым неотрицательным числом, которое называется *порядком* v. Для $e \in \mathcal{E}$ его порядок определяется как порядок его конечной точки. Число $\sigma := \max_{j=\overline{1,r}} |v_j|$ называется *высотой дерева* T. Пусть $V^{(\mu)} := \{v \in V : \ |v| = \mu\}$, $\mu = \overline{0, \sigma}$ – множество вершин порядка μ и пусть $\mathcal{E}^{(\mu)} := \{e \in \mathcal{E} : \ e = [v, w], \ v \in V^{(\mu-1)}, w \in V^{(\mu)}\}$, $\mu = \overline{1, \sigma}$ – множество ребер порядка μ.

Каждое ребро $e \in \mathcal{E}$ рассматривается как отрезок $[0, 1]$ и параметризуется параметром $x \in [0, 1]$. Для нас удобно выбрать следующую ориентацию на каждом ребре $e = [v, w] \in \mathcal{E}$: если $z = z(x) \in e$, то $z(0) = w$, $z(1) = v$, т.е. $x = 0$ соответствует конечной точке w, а $x = 1$ соответствует начальной точке v. Для определенности занумеруем вершины v_j следующим образом: $\Gamma := \{v_0, v_1, \dots, v_p\}$ – граничные вершины, $v_{p+1} \in V^{(1)}$, а v_j, $j > p + 1$, занумерованы в порядке возрастания $|v_j|$. Аналогично занумеруем ребра: $e_j = [v_{j_k}, v_j]$, $j = \overline{1, r}$, $j_k < j$. В частности, $E := \{e_1, \dots, e_{p+1}\}$ – множество граничных ребер, $e_{p+1} = [v_0, v_{p+1}]$. Ясно, что $e_j \in \mathcal{E}^{(\mu)}$ тогда и только тогда, когда $v_j \in V^{(\mu)}$.

Интегрируемая функция Y на T может быть представлена как вектор $Y(x) = [y_j(x)]_{j \in J}$, $x \in [0,1]$, где $J := \{j : \ j = \overline{1,r}\}$, и функция $y_j(x)$ определена на ребре e_j. Пусть $q(x) = [q_j(x)]_{j \in J}$ и $p(x) = [p_j(x)]_{j \in J}$ – комплекснозначные функции на T такие, что $p_j(x) \in AC[0,1]$, $q_j(x) \in L[0,1]$. Рассмотрим дифференциальное уравнение на T:

$$y_j''(x) + (\rho^2 + i\rho p_j(x) + q_j(x))y_j(x) = 0, \quad x \in [0,1], \tag{1}$$

где $j \in J$, ρ – спектральный параметр, функции $y_j(x)$, $y_j'(x)$ абсолютно непрерывны на $[0,1]$ и удовлетворяют следующим условиям склейки в каждой внутренней вершине v_k, $k = \overline{p+1,r}$:

$$\left.\begin{aligned} y_k(0) &= a_{kj} y_j(1) \quad \text{для всех} \quad e_j \in R(v_k), \\ y_k'(0) &= \sum_{e_j \in R(v_k)} \Big(a_{kj}^1 y_j'(1) + a_{kj}^0 y_j(1) \Big), \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

где a_{kj}, a_{kj}^0, a_{kj}^1 – комплексные числа, причем $a_{kj} a_{kj}^1 \neq 0$. Предположим, что

$$r_k := \sum_{e_j \in R(v_k)} \frac{a_{kj}^1}{a_{kj}} \neq -1, \quad k = \overline{p+1,r}. \tag{3}$$

Условие (3) называется условием *регулярности склейки*. Дифференциальные операторы на T, которые не удовлетворяют условию регулярности склейки, обладают качественно другими свойствами при исследовании обратной задачи и в данной статье не рассматриваются. Отметим, что если $a_{kj} = a_{kj}^1 = 1$, $a_{kj}^0 = 0$ при всех k, j, то условия (2) называются *стандартными*. Для стандартных условий склейки условие (3) выполняется автоматически. Ясно, что в (2) мы имеем $2r - p - 1$ условий. Для того чтобы определить краевую задачу для (1), нам нужно дополнительно задать $p + 1$ условий в граничных вершинах v_j, $j = \overline{0,p}$. Для этого введем следующие линейные формы в граничных вершинах $v_j \in \Gamma$:

$$U_j(Y) := (Y' + (i\rho h_{j1} + h_{j0})Y)_{|v_j}, \quad j = \overline{0,p},$$

где h_{js} – комплексные числа, $h_{j1} \neq \pm 1$. Другими словами,

$$U_j(Y) = y_j'(0) + (i\rho h_{j1} + h_{j0}) y_j(0), \quad j = \overline{1,p},$$

$$U_0(Y) = y_{p+1}'(1) + (i\rho h_{01} + h_{00}) y_{p+1}(1).$$

Обозначим через L_0 краевую задачу для уравнения (1) с условиями склейки (2) и с краевыми условиями

$$U_j(Y) = 0, \quad j = \overline{0,p}.$$

Кроме того, рассмотрим краевые задачи L_k, $k = \overline{1,p}$, для уравнения (1) с условиями склейки (2) и с краевыми условиями $Y_{|v_k} = 0$, $U_j(Y) = 0$, $j = \overline{0,p} \setminus k$. Пусть $\Lambda_k := \{\rho_{lk}\}_{l \in \mathbf{Z}}$ – спектр задачи L_k, $k = \overline{0,p}$, причем собственные значения $\{\rho_{lk}\}$ считаются с учетом кратностей. Обратная задача ставится следующим образом.

Обратная задача 1. По заданным спектрам Λ_k, $k = \overline{0,p}$, построить $q = [q_j]_{j \in J}$, $p = [p_j]_{j \in J}$ и $h = [h_{js}]_{j=\overline{0,p},\, s=0,1}$.

Если $r = 1$ (т.е. дерево T является отрезком $[0,1]$), то $p = 1$, и обратная задача 1 совпадает с классической обратной задачей восстановления пучка по двум спектрам [1].

Сформулируем теорему единственности решения обратной задачи 1. Для этого наряду с L_k рассмотрим краевые задачи $\tilde{L}_k$ того же вида, но с другими коэффициентами $\tilde{q} = [\tilde{q}_j]_{j \in J}$, $\tilde{p} = [\tilde{p}_j]_{j \in J}$ и $\tilde{h} = [\tilde{h}_{js}]_{j=\overline{0,p},\, s=0,1}$. Пусть $\tilde{\Lambda}_k$ – спектр задачи $\tilde{L}_k$.

Теорема 1. *Если* $\Lambda_k = \tilde{\Lambda}_k$, $k = \overline{0,p}$, *то* $q_j(x) = \tilde{q}_j(x)$, $p_j(x) = \tilde{p}_j(x)$ *и* $h_{js} = \tilde{h}_{js}$, $j \in J$, $s = 0,1$, $x \in [0,1]$. *Таким образом, задание* $p+1$*-го спектра задач* Λ_k, $k = \overline{0,p}$, *однозначно определяет коэффициенты дифференциального уравнения и линейных форм.*

Доказательство теоремы конструктивно и дает процедуру решения обратной задачи 1. При этом используются и развиваются идеи метода спектральных отображений [1, 2]. Кроме того, используется техника работ [3, 4], в которых исследовалась обратная задача для операторов Штурма – Лиувилля на деревьях. Отметим также книгу [5], в которой приведен достаточно полный обзор результатов по краевым задачам для дифференциальных уравнений на пространственных сетях.

Работа выполнена при финансовой поддержке грантов РФФИ и ННС (проекты 07-01-00003 и 07-01-92000-ННС-а).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Yurko V.A.* Method of Spectral Mappings in the Inverse Problem Theory. Inverse and Ill-posed Problems Series. Utrecht: VSP, 2002.

2. *Юрко В.А.* Введение в теорию обратных спектральных задач. М.: Физматлит, 2006.

3. *Yurko V.A.* Inverse spectral problems for Sturm – Liouville operators on graphs // Inverse Problems. 2005. Vol. 21. P. 1075–1086.

4. *Юрко В.А.* О восстановлении операторов Штурма – Лиувилля на графах // Мат. заметки. 2006. Т. 79, вып. 4. С. 619–630.

5. *Покорный Ю.В., Пенкин О.М., Прядиев В.Л., Боровских А.В., Лазарев К.П., Шабров С.А.* Дифференциальные уравнения на геометрических графах. М.: Физматлит, 2004.