

Э.В. Антоненко, Н.С. Хлопцева

ЭФФЕКТИВНОСТЬ СЖАТЫХ СТЕРЖНЕЙ

Первые попытки отыскания оптимальной формы сжатых осевыми силами колонн принадлежат Ж.Л. Лагранжу. Для нахождения максимальной осевой критической силы P_* колонны сплошного кругового поперечного сечения при ее минимальном объеме V он ввел величину P_*/V^2 , назвав ее эффективностью. До настоящего времени решение такой задачи в общем виде отсутствует [1–4].

Снижение материалоемкости, характеризующееся отношением критической силы к массе стержня стало актуальным в период развития авио- и ракетостроения. Результаты расчета устойчивости стержней переменного сечения, связанные с этой проблемой, нашли отражение в справочной литературе [5]. Однако рекомендаций по выбору эффективной формы стержней обнаружить не удалось.

Предлагаются решения задачи устойчивости стержня переменного по длине поперечного сечения с учетом его массы и рекомендации по выбору закона изменения поперечного сечения.

Критические силы потери устойчивости геометрически неоднородных стержней определялись методом Рэлея:

$$P_* = \frac{\int_0^l D(x)[w''(x)]^2 dx}{\int_0^l [w'(x)]^2 dx}, \quad (1)$$

где $D(x) = EI(x)$ — изгибная жесткость, $w(x)$ — функция прогиба оси стержня, l — его длина, x — осевая координата.

Рассматривались стержни сплошного кругового сечения ($I = \pi R^4/4$) с переменным по длине радиусом $R(x)$ и кольцевого поперечного сечения ($I =$

$= \pi R^3 \delta(x)$) с радиусом средней поверхности R и переменной вдоль оси стержня толщиной $\delta(x)$. Определялась их масса m и эффективность

$$\bar{P} = \frac{P_*}{m}.$$

Эффективность неоднородного \bar{P}_*^H сравнивалась с эффективностью однородного стержня \bar{P}_*^O . При одинаковой массе неоднородного и однородного стержней весовая выгодность оценивалась показателем

$$\gamma = \frac{P_*^H}{P_*^O}.$$

При $\gamma > 1$ неоднородный стержень «выгоднее» однородного. По показателю γ и заданной величине требуемой критической силы можно оценить массу стержня (колонны).

Расчеты проводились для трех граничных условий: 1 — шарнирное опирание, 2 — защемление и 3 — консольное закрепление. Функции прогиба соответственно задавались в виде

$$w_1(x) = A \sin \frac{\pi x}{l}, \quad w_2(x) = A \sin^2 \frac{\pi x}{l}, \quad w_3(x) = A \left(1 - \cos \frac{\pi x}{2l}\right).$$

При расчете критических сил и массы однородных стержней, равных по массе неоднородным той же длины, вводилось понятие среднего радиуса R_{cp} и средней толщины δ_{cp} , обеспечивающих изгибную жесткость D_{cp} .

Формулы для P_* , полученные из (1), представлялись в виде известных формул для соответствующих граничных условий с поправочным коэффициентом k [4]. Например, для кольцевого составного, шарнирно закрепленного стержня

$$P_*^O = \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 D_c, \quad P_*^H = P_*^O k, \quad k = N + \bar{\delta}^3(1 - N), \quad N = \bar{l} - \frac{\sin 2\pi \bar{l}}{2\pi},$$

$$\gamma = k[\bar{l} + \bar{\delta}(1 - \bar{l})]^{-3}, \quad \bar{l} = l_1/l, \quad \bar{\delta} = \delta_2/\delta_1.$$

Рассматривались несколько законов изменения $R(x)$ и $\delta(x)$ (таблица).

Для сплошного сечения	Для кольцевого сечения
I. Составной стержень $R(x) = \begin{cases} R_1, & 0 \leq x \leq l_1, \\ R_2, & l_1 \leq x \leq l, \end{cases}$ $R_{cp} = R_1 \sqrt{\bar{l} + \bar{R}^2(1 - \bar{l})},$ $\bar{R} = R_2/R_1, \quad \bar{l} = l_1/l$	I. Составной стержень $\delta(x) = \begin{cases} \delta_1, & 0 \leq x \leq l_1, \\ \delta_2, & l_1 \leq x \leq l, \end{cases}$ $\delta_{cp} = \delta_1[\bar{l} + \bar{\delta}(1 - \bar{l})], \quad \bar{\delta} = \delta_2/\delta_1, \quad \bar{l} = l_1/l$
II. $R(x) = R_0 \left(1 + a \sin \frac{\pi x}{l}\right),$ $R_{cp} = R_0 \sqrt{1 + \frac{4}{\pi} a + \frac{1}{2} a^2}$	II. $\delta(x) = \delta_0 \left(1 + a \sin \frac{\pi x}{l}\right),$ $\delta_{cp} = \delta_0 \left(1 + \frac{2}{\pi} a\right)$
III. $R(x) = R_0(1 + ax),$ $R_{cp} = R_0 \sqrt{1 + al + \frac{1}{3}(al)^2}$	III. $\delta(x) =$ $\begin{cases} \delta_0 \left(1 + \frac{2x}{l}\right), & 0 \leq x \leq l/2, \\ \delta_0 \left(3 - \frac{2x}{l}\right), & l/2 \leq x < l, \end{cases}$ $\delta_{cp} = 1,5\delta_0$

Вычислительный эксперимент показал высокую эффективность для консольного составного сплошного сечения (рис. 1), трубчатого стержня с переменной толщиной (рис. 2), где $\delta(x) = \delta_0 \left(1 + a \sin \frac{\pi x}{l}\right)$, и стержня с переменным радиусом (рис. 3), где $R = R_0 \left(1 + a \sin \frac{\pi x}{l}\right)$. Меньшая эффективность оказалась для стержня сплошного сечения, когда $R(x) = R_0(1 + ax)$ (рис. 4), где $\bar{l} = al$.

Цифры около кривых (1, 2, 3) указывают схему закреплений.

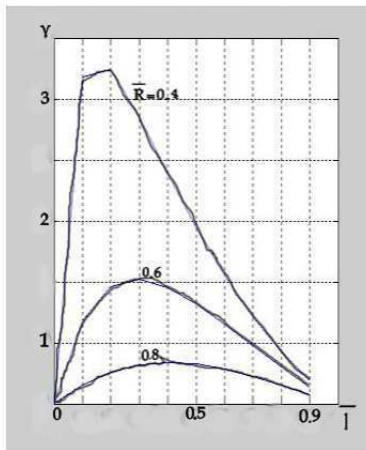


Рис. 1

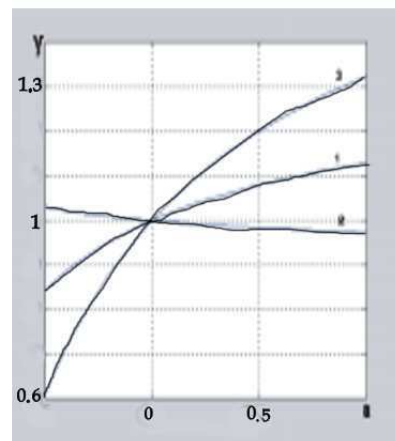


Рис. 2

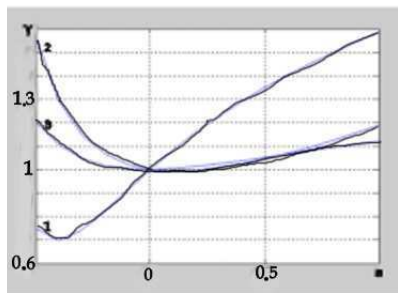


Рис. 3

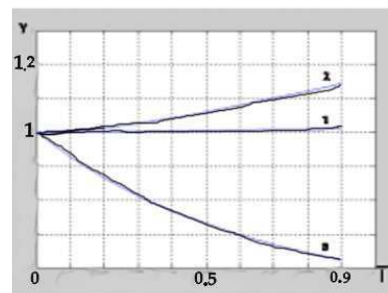


Рис. 4

Авторы располагают аналитическими выражениями и графическими зависимостями \bar{P} и γ для перечисленных ситуаций (I, II, III).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Сейранян А.П. Задача Лагранжа о наивыгоднейшем очертании колонны // Успехи механики. 2003. № 2. С. 45–96.
2. Egorov Y.V. On the Lagrange problem about the strongest column // Rapport Interne 02–16. Universite Paul Sabatier, Toulouse. 2002. P. 1–7.
3. Kanno Y., Ohsaki M. Necessary and sufficient conditions for global optimality of eigenvalue optimization problems // Structural and Multidisciplinary Optimization. 2001. V. 22. P. 248–252.
4. Антоненко Э.В., Хлопцева Н.С. Устойчивость неоднородных элементов оболочечных конструкций // Смешанные задачи механики деформируемого тела. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 2005. С. 39–42.
5. Прочность. Устойчивость. Колебания. Справочник: В 3 т. М.: Машиностроение, 1968. Т. 3. 568 с.