УДК 629

В.Г. Бирюков

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ УГЛОВЫМ ДВИЖЕНИЕМ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА С ПОМОЩЬЮ МАХОВИКОВ

Рассматривается задача оптимального в смысле минимума энергетических затрат управления угловым движением сферически симметричного космического аппарата с помощью вращающихся маховиков. С использованием принципа максимума Л.С. Понтрягина построено аналитическое решение задачи в классе плоских эйлеровых разворотов для случая нулевого вектора кинетического момента.

1. Постановка задачи. Рассмотрим сферически симметричный космический аппарат (КА), исполнительными органами системы ориентации которого являются управляющие маховики. Будем полагать, что оси вращения маховиков параллельны главным осям инерции КА и моменты внешних сил пренебрежимо малы. Предположим также, что вектор кинетического момента механической системы, состоящей из корпуса КА и управляющих маховиков, равен нулю (такой случай возможен, например, если начальные угловые скорости КА и управляющих маховиков равны нулю). Угловое движение КА с учетом сделанных предположений будет описываться системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} (J - J_M)\dot{\omega}_1 = -u_1 - aJ\omega_1, \\ (J - J_M)\dot{\omega}_2 = -u_2 - aJ\omega_2, \\ (J - J_M)\dot{\omega}_3 = -u_3 - aJ\omega_3, \end{cases} \tag{1}$$

$$2\dot{\bar{\lambda}} = \bar{\lambda} \circ \bar{\omega}, \tag{2}$$

где J, J_M — осевые моменты инерции КА и маховиков, $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ — проекции вектора абсолютной угловой скорости КА на оси жестко связанной с КА системы координат, $a = \mathrm{const}$ — коэффициент, характеризующий моменты сил сопротивления, возникающих при вращении маховиков, u_1, u_2, u_3 — моменты сил, прикладываемых к маховикам (управляющие воздействия), $\bar{\lambda}$ — кватернион ориентации КА.

Требуется построить управления u_1, u_2, u_3, переводящие КА, движение которого описывается уравнениями (1), (2), из начального состояния

$$\bar{\lambda}(0) = \bar{\lambda}^0, \quad \bar{\omega}(0) = \bar{\omega}^0 \tag{3}$$

в конечное состояние

$$\bar{\lambda}(T) = \bar{\lambda}^T, \quad \bar{\omega}(T) = \bar{\omega}^T \tag{4}$$

и доставляющие минимум функционалу

$$I = \int_0^T \left(u_1^2 + u_2^2 + u_3^2\right) dt,$$

который характеризует общие энергетические затраты на управление.

Управления u_1, u_2, u_3 будем считать неограниченными, а время переориентации T — известным.

2. Метод решения задачи. Для решения поставленной задачи использовался принцип максимума Л.С. Понтрягина. Составлялась функция Гамильтона – Понтрягина и система дифференциальных уравнений для сопряженных переменных. Из условия максимума функции Гамильтона – Понтрягина были найдены оптимальные управления в виде функции сопряженных переменных.

В результате решение задачи оптимального управления угловым движением сферически симметричного КА сведено к решению краевой задачи для системы дифференциальных уравнений для фазовых и сопряженных переменных:

$$\begin{cases} (J - J_M)\dot{\bar{\omega}} = \dfrac{1}{2}\bar{\Phi} - aJ\bar{\omega}, \\ (J - J_M)\dot{\bar{\Phi}} = aJ\bar{\Phi} + \dfrac{1}{2}\bar{p}, \\ \dot{\bar{p}} = \bar{p} \times \bar{\omega}, \\ 2\dot{\bar{\lambda}} = \bar{\lambda} \circ \bar{\omega}, \end{cases} \tag{5}$$

где $\bar{\Phi}$ — вектор сопряженных переменных, соответсвующих переменным $\omega_1, \omega_2, \omega_3$, вектор $\bar{p}$ — вводится также как и в работе [1]. Граничными условиями для системы диффернциальных уравнений (5) являются соотношения (3), (4).

Следует отметить, что система дифференциальных уравнений (5) допускает векторный первый интеграл

$$2(J - J_M)\bar{\omega} \times \bar{\Phi} + \bar{p} = \text{const}.$$

3. Решение задачи для частного случая. Найти общее решение системы дифференциальных уравнений (5) не удается, поэтому, следуя работам [1, 2], укажем одно частное решение. Пусть вектор $\bar{\omega}$ параллелен вектору $\bar{p}$. Из третьего уравнения системы (5) получаем $\bar{p} = \bar{p}^0 = \text{const}$. Следовательно, в этом случае вектор абсолютной угловой скорости КА будет иметь постоянное направление.

Решения первого и второго уравнений (5) в этом случае имеют вид

$$\bar{\omega} = \bar{\omega}^0 e^{-kt} + \frac{1}{8a^2J^2}[e^{-kt} + e^{kt} - 2]\bar{p}^0 + + \frac{1}{4aJ}[e^{kt} + e^{-kt}]\bar{\Phi}^0, \tag{6}$$

$$\bar{\Phi} = \bar{\Phi}^0 \exp(kt) + \frac{1}{2aJ}[\exp(kt) - 1]\bar{p}^0, \tag{7}$$

где $k = (aJ)/(J - J_M)$.

Так как вектор абсолютной угловой скорости КА должен сохранять постоянное направление, то из соотношений (6) и (7) следует, что вектор $\bar{\Phi}^0$ должен быть параллелен вектору $\bar{p}^0$.

Общее решение кватернионного кинематического уравнения (2) в случае постоянного по направлению вектора абсолютной угловой скорости имеет вид

$$\bar{\lambda} = \bar{\lambda}^0 \circ \exp\left(\frac{1}{2}\bar{q}\int\limits_0^t |\bar{\omega}| dt\right), \tag{8}$$

где $\bar{q} = \bar{\omega}/|\bar{\omega}|$, $|\bar{\omega}|$ — модуль вектора абсолютной угловой скорсти $\bar{\omega}$.

Постоянные $|\bar{p}^0|$ и $|\bar{\Phi}^0|$ могут быть определны с помощью соотношений (6)–(8) и граничных условий (3), (4).

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 05-01-00347).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Бранец В.Н., Шмыглевский И.П.* Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела. М.: Наука, 1973. 320 с.

2. *Молоденков А.В.* Кватернионное решение задачи оптимального разворота твердого тела со сферическим распределением масс // Проблемы механики и управления: Сб. науч. тр. Пермь, 1995. С. 122–131.

УДК 539.3

М.И. Брюшко

ВЛИЯНИЕ ДЛИНЫ ОБРАЗУЮЩЕЙ НА НДС И ТЕПЛОВОЕ ПОЛЕ ТЕРМОВЯЗКОУПРУГОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ПРИ ВИБРАЦИОННОМ ИЗГИБЕ

В работе [1] рассмотрена методика и проведены расчеты по определению напряженно-деформированного состояния (НДС) теплового поля короткой тонкостенной изотропной вязкоупругой цилиндрической оболочки, испытывающей малые деформации под действием распределенной по поверхности поперечной нагрузки. Считается, что свойства материала оболочки зависят от температуры.

В данной статье был проведен анализ зависимости характеристик НДС и температуры от длины образующей при заданных условиях нагружения, закрепления и теплообмена. Для числовых расчетов геометрические размеры