УДК 629

И.А. Панкратов, Ю.Н. Челноков

ЧЕТЫРЕХИМПУЛЬСНАЯ ПЕРЕОРИЕНТАЦИЯ КРУГОВОЙ ОРБИТЫ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА

В статье рассмотрена задача четырёхимпульсной переориентации круговой орбиты космического аппарата (КА). Построено численное решение полученной системы уравнений при условии равенства длин двух внутренних участков активного движения КА. В частном случае, когда равны к тому же длины первого и четвёртого участков активного движения КА, найдено аналитическое решение задачи.

1. Рассмотрим перевод круговой орбиты КА из начального состояния, задаваемого кватернионом ориентации $\mathbf{\Lambda}(t_0) = \mathbf{\Lambda}^0$, в конечное состояние, задаваемое кватернионом ориентации $\mathbf{\Lambda}(t^*) = \mathbf{\Lambda}^*$, с помощью управления $p_3 = \pm p_{\max}$ при наличии трёх точек переключения управления в моменты времени t_1, t_2, t_3 (четырех участков активного движения).

В рассматриваемом случае кватернионы $\mathbf{\Lambda}^0$ и $\mathbf{\Lambda}^*$ связаны соотношением [1]:

$$\mathbf{\Lambda}^* \circ \Big\{ \cos\Big[\frac{1}{2}\Big(\varphi_0 + \sum_1^4 \Delta\varphi_i\Big)\Big] + \mathbf{i}_3 \sin\Big[\frac{1}{2}\Big(\varphi_0 + \sum_1^4 \Delta\varphi_i\Big)\Big]\Big\} =$$

$$= \mathbf{\Lambda}^0 \circ \big(\cos(\varphi_0/2) + \mathbf{i}_3 \sin(\varphi_0/2)\big) \circ$$

$$\circ\, \Delta\boldsymbol{\lambda}_1(\Delta\varphi_1) \circ \Delta\boldsymbol{\lambda}_2(\Delta\varphi_2) \circ \Delta\boldsymbol{\lambda}_3(\Delta\varphi_3) \circ \Delta\boldsymbol{\lambda}_4(\Delta\varphi_4), \qquad (1)$$

$$\Delta\boldsymbol{\lambda}_k(\Delta\varphi_k) = \cos(\omega^*\Delta\varphi_k/2) + (\boldsymbol{\omega}_k^*/\omega^*)\sin(\omega^*\Delta\varphi_k/2),\ \ k = 1,2,3,4;$$

$$\omega^* = \Big[1 + \Big(\frac{r^3}{c^2}p_{\max}\Big)^2\Big]^{1/2},$$

для четного k $\boldsymbol{\omega}_k^* = \mp\big(r^3/c^2\big)p_{\max}\mathbf{i}_1 + \mathbf{i}_3$,
для нечетного k $\boldsymbol{\omega}_k^* = \pm\big(r^3/c^2\big)p_{\max}\mathbf{i}_1 + \mathbf{i}_3$.

Здесь r – радиус орбиты, c – постоянная площадей; $\Delta\varphi_k = \varphi_k - \varphi_{k-1}$ – приращение на k-м участке траектории истинной аномалии φ, характеризующей положение КА на орбите; $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$ – векторные мнимые единицы Гамильтона.

2. Поставим задачу четырёхимпульсной переориентации круговой орбиты КА при условии равенства двух внутренних участков активного движения КА: зная φ_0, $\mathbf{\Lambda}^0$ и $\mathbf{\Lambda}^*$, найти длительности (в радианной мере) четырех участков активного движения $\Delta\varphi_1$, $\Delta\varphi_2$, $\Delta\varphi_3$, $\Delta\varphi_4$ при условии, что

$$\omega^*\Delta\varphi_2 = \omega^*\Delta\varphi_3 = x. \qquad (2)$$

Отметим, что поставленная задача вытекает из решения задачи оптимального (в смысле быстродействия) разворота орбиты КА с помощью принципа максимума. Это решение сводится к нахождению времени оптимального движения $t^*(\varphi^*)$, количества активных участков движения КА и их длительностей (величин $\Delta\varphi_i$, $i = 1, 2, ..., n$). Условие (2) следует из результатов численного решения вышеуказанной задачи оптимальной переориентации орбиты КА. В [1] было найдено аналитическое решение данной задачи при $x = \pi$.

После ряда преобразований уравнения (1) приходим к системе четырёх нелинейных трансцендентных уравнений относительно трёх переменных Δ_1, Δ_4, x :

$$\begin{gathered}
\big(\cos^2(x/2) + a_{11}\sin^2(x/2)\big)\cos(\Delta_1)\cos(\Delta_4) - a_{12}\sin(x)\sin(\Delta_1+\Delta_4)+ \\
+a_{13}\sin(\Delta_1)\sin(\Delta_4)\cos^2(x/2) + a_{14}\sin(\Delta_1)\sin(\Delta_4)\sin^2(x/2) = \\
= \lambda_0^{(3)}\cos(\varphi^*) - \lambda_3^{(3)}\sin(\varphi^*), \\
\pm a_{21}\sin(\Delta_1-\Delta_4)\cos^2(x/2) \pm a_{22}\sin(\Delta_1-\Delta_4)\sin^2(x/2) = \\
= \lambda_1^{(3)}\cos(\varphi^*) + \lambda_2^{(3)}\sin(\varphi^*), \qquad (3) \\
\mp a_{31}\sin(\Delta_1)\sin(\Delta_4)\cos^2(x/2) \pm a_{32}\big(2\cos(\Delta_1)\cos(\Delta_4) + a_{33}\sin(\Delta_1)\sin(\Delta_4)\big)\mp \\
\mp a_{34}\sin(\Delta_1+\Delta_4) = \lambda_2^{(3)}\cos(\varphi^*) - \lambda_1^{(3)}\sin(\varphi^*), \\
a_{41}\cos(\Delta_1+\Delta_4)\sin(x) + a_{42}\sin(\Delta_1+\Delta_4)\cos^2(x/2)+ \\
+a_{43}\sin(\Delta_1+\Delta_4) = \lambda_3^{(3)}\cos(\varphi^*) + \lambda_0^{(3)}\sin(\varphi^*).
\end{gathered}$$

Здесь a_{ij} – известные величины, $\varphi^* = \varphi_0/2 + (\Delta_1 + x + \Delta_4)/\omega^*$; $\Delta_1 = (1/2)\omega^*\Delta\varphi_1$; $\Delta_4 = (1/2)\omega^*\Delta\varphi_4$; $u = (r^3/c^2)p_{\max}$; $\lambda_j^{(3)}$ – величины, выражаемые через известные параметры задачи; верхний знак берется, если на первом активном участке движения КА $p_3 = +p_{\max}$, нижний – в противном случае.

Четыре уравнения (3) связаны условием нормировки: суммы квадратов левых и правых частей равны единице. Поэтому можно решать любые три из них, исключённое же уравнение используется для контроля.

Полученная система уравнений решалась с использованием метода Ньютона. Параллельно для контроля производились расчёты с использованием пакета MathCad 2003. В качестве конечной ориентации брались долгота восходящего узла Ω_1 и наклонение I_1 спутниковой орбитальной системы ГЛОНАСС. Примеры результатов приведены в таблице.

Характерные величины: $p_{\max} = 0,101907$ м/с^2, $r = 26000000$ м.

Отметим, что хорошая сходимость вычислительного процесса наблюдалась в случаях, когда разница между Ω_0 и Ω_1 не превышала $5°$, а разница между I_0 и I_1 – $35°$.

p_3, 1 уч-к	Ω_0, °	I_0, °	Ω_1, °	I_1, °	$\Delta\varphi_1$, рад	$\Delta\varphi_2 = \Delta\varphi_3$, рад	$\Delta\varphi_4$, рад
$+p_{\max}$	66	210	64,8	215	3,229326	1,352621	2,820122
$-p_{\max}$	66	210	64,8	215	2,223588	1,358245	2,938439
$+p_{\max}$	70	240	64,8	215	0,491153	2,999735	4,455259

3. Рассмотрим частный случай четырёхимпульсной переориентации круговой орбиты КА при условии равенства двух внутренних участков активного движения КА и двух крайних участков:

$$\omega^*\Delta\varphi_1 = \omega^*\Delta\varphi_4 = y.$$

Из второго уравнения системы (3) в этом случае получим

$$x + y = \omega^*\left[\arctan(-\lambda_1^{(3)}/\lambda_2^{(3)}) + \pi k - \varphi_0/2\right] = C_k,\ k \in Z. \tag{4}$$

Из остальных уравнений системы (3) с учетом (4) следует уравнение

$$A\cos^3 x + B\cos^2 x + C\cos x + D = 0,$$

где A, B, C, D – известные величины.

Таким образом, в рассматриваемом частном случае решение задачи свелось к решению алгебраического уравнения третьего порядка относительно $\cos x$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *И.А. Панкратов, Ю.Н. Челноков.* Переориентация круговой орбиты космического аппарата с тремя точками переключения управления// Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2006. Вып. 8. С. 210–213.

УДК 533.6.011

Я.Г. Сапунков

ПРИБЛИЖЕННОЕ АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О СХОДЯЩЕЙСЯ УДАРНОЙ ВОЛНЕ

В статье в автомодельных переменных в элементарных функциях получено приближенное решение задачи для цилиндрической и сферической сходящейся ударной волны в области между ударной волной и предельной характеристикой, ограничивающей область влияния возмущенного движения газа на ударную волну. Для определения показателя степени в автомодельной переменной получено нелинейное уравнение, численное решение которого отличается от показателя в полной автомодельной задаче в четвертом знаке после запятой.

1. Движение идеального совершенного газа с отношением теплоемкостей γ в задаче о сходящейся ударной волне цилиндрической ($\nu = 1$) или сфери-