Результаты расчетов, представленные графически, показывают, что среди рассмотренных примеров только оболочка, толщина которой изменяется по закону $\delta(x) = \delta_0 e^{-cx}$, имеет характеристики устойчивости, приблизительно равные расчетным для оболочки с постоянной толщиной стенок (рис. 1, где $\bar{l} = l_1/l$), в остальных случаях конструкции с переменной толщиной стенок способны выдерживать гораздо более высокую нагрузку.

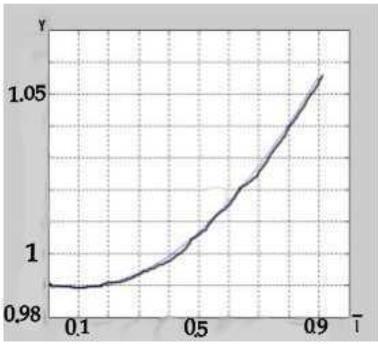

Рис. 1

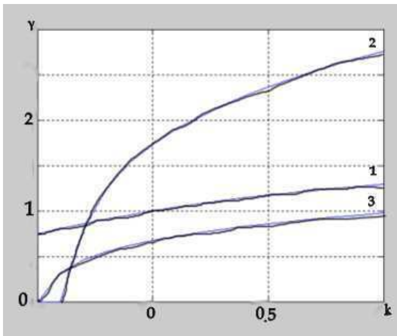

Рис. 2

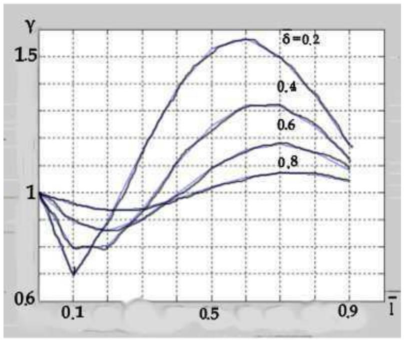

Рис. 3

Для случая $\delta(x) = \delta_0(1 + a \sin \pi x/l)$ показатель эффективности представлен на рис. 2 (где цифрами *1, 2, 3* показаны случаи шарнирного опирания краев оболочки, защемления и консоли). Для составной оболочки в случае классических граничных условий зависимость изображена на рис. 3.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Антоненко Э.В., Хлопцева Н.С.* Осесимметричная формапотери устойчивости тонкостенных цилиндров переменной толщины // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2006. Вып. 8. С.165–167.

2. *Вольмир А.С.* Устойчивость деформируемых систем. М.: Наука, 1974. 640 с.

3. *Кан С.Н.* Строительная механика оболочек. М.: Машиностроение, 1966. 508 с.

4. *Товстик П.Е.* Устойчивость тонких оболочек. М.: Наука, 1995. 308 с.

УДК 629

Ю.Н. Челноков

АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ПЕРЕОРИЕНТАЦИИ ОРБИТЫ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА ЗА ФИКСИРОВАННОЕ ВРЕМЯ

1. Дифференциальные уравнения ориентации орбиты космического аппарата. Будем считать, что вектор ускорения $\mathbf{u}$ от тяги реактивного двигателя во все время управляемого движения космического аппарата (КА) направлен ортогонально плоскости его орбиты. Тогда орбита КА в процессе управления движением центра масс КА не меняет своей формы и своих размеров, а поворачивается в пространстве под действием управления $\mathbf{u}$ как неизменяемая (недеформируемая) фигура. Дифференциальные уравнения ориентации орбиты КА в угловых элементах орбиты имеют вид

$$
\begin{gathered}
d\Omega_u/dt = (r/c)\,u\,\sin(\omega_\pi + \varphi)\operatorname{cosec} I, \\
dI/dt = (r/c)\,u\,\cos(\omega_\pi + \varphi), \\
d\omega_\pi/dt = -(r/c)\,u\,\sin(\omega_\pi + \varphi)\operatorname{ctg} I, \\
d\varphi/dt = c/r^2,\ r = p/(1 + e\cos\varphi),\ c = \mathrm{const},
\end{gathered}
\tag{1}
$$

где Ω_u – долгота восходящего узла, I – наклон орбиты, ω_π – угловое расстояние перицентра от узла (переменные Ω_u, I, ω_π называются угловыми оскулирующими элементами орбиты КА), φ – истинная аномалия (угловая переменная, характеризующая положение КА на орбите); $r = |\mathbf{r}|$ – модуль радиуса-вектора центра масс КА; p и e – параметр и эксцентриситет орбиты, $c = |\mathbf{r} \times \boldsymbol{\nu}|$ – постоянная площадей (модуль вектора момента скорости центра масс КА); u – проекция вектора ускорения $\mathbf{u}$ на направление вектора момента скорости центра масс КА (управление).

Решение задачи переориентации орбиты КА на основе классических уравнений (1) достаточно сложно в силу их нелинейности и наличия в них особых точек $I = 0, \pi$. Задача решается гораздо проще, если использовать дифференциальные уравнения ориентации орбиты КА в параметрах Эйлера (Родрига – Гамильтона), имеющие вид [1,2]

$$
\begin{gathered}
2d\Lambda_0/dt = -\Omega_1\Lambda_1 - \Omega_2\Lambda_2, \\
2d\Lambda_1/dt = \Omega_1\Lambda_0 - \Omega_2\Lambda_3, 2d\Lambda_2/dt = \Omega_2\Lambda_0 + \Omega_1\Lambda_3, \\
2d\Lambda_3/dt = \Omega_2\Lambda_1 - \Omega_1\Lambda_2, \\
d\varphi/dt = c/r^2,\ r = p/(1 + e\cos\varphi),\ c = \mathrm{const}, \\
\Omega_1 = (r/c)\,u\,\cos\varphi,\ \Omega_2 = (r/c)\,u\,\sin\varphi,
\end{gathered}
\tag{2}
$$

где Λ_j (j=0,1,2,3) – параметры Эйлера, характеризующие ориентацию орбиты КА в опорной (инерциальной) системе координат X; Ω_1, Ω_2, $\Omega_3 = 0$ – проекции вектора $\boldsymbol{\Omega}$ мгновенной абсолютной угловой скорости орбиты на связанные с ней координатные оси.

Уравнения в кватернионной записи принимают вид

$$
2d\boldsymbol{\Lambda}/dt = \boldsymbol{\Lambda} \circ \boldsymbol{\Omega},\ \boldsymbol{\Omega} = \Omega_1\mathbf{i}_1 + \Omega_2\mathbf{i}_2 = (r/c)\,u\,(\cos\varphi\mathbf{i}_1 + \sin\varphi\mathbf{i}_2), \tag{3}
$$

$$
d\varphi/dt = c/r^2,\ r = p/(1 + e\cos\varphi),\ c = \mathrm{const},
$$

где $\boldsymbol{\Lambda} = \Lambda_0 + \Lambda_1\mathbf{i}_1 + \Lambda_2\mathbf{i}_2 + \Lambda_3\mathbf{i}_3$ – кватернион ориентации орбиты КА (кватернионный оскулирующий элемент орбиты КА); $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$ – векторные мнимые единицы Гамильтона.

Вводя кватернионную переменную $\Delta\mathbf{\Lambda}$, характеризующую отклонение углового положения орбиты КА от ее требуемого положения, задаваемого кватернионом $\mathbf{\Lambda}^*$, в соответствии с кватернионной формулой $\mathbf{\Lambda} = \mathbf{\Lambda}^* \circ \Delta\mathbf{\Lambda}$ сложения конечных поворотов [2] и используя кватернионное дифференциальное уравнение (3) ориентации орбиты КА, получаем следующее кватернионное дифференциальное уравнение возмущенного движения центра масс КА в параметрах Эйлера:

$$2d\Delta\mathbf{\Lambda}/dt = \Delta\mathbf{\Lambda} \circ \mathbf{\Omega} =$$

$$= (r(\varphi(t))/c)\, u\, \Delta\mathbf{\Lambda} \circ (\cos\varphi(t)\mathbf{i}_1 + \sin\varphi(t)\mathbf{i}_2),\ \ c = \mathrm{const}, \tag{4}$$

где кватернионная переменная $\Delta\mathbf{\Lambda} = \cos({}^1/{}_2\Delta\Phi) + \sin({}^1/{}_2\Delta\Phi)\mathbf{e}_\Delta$ определяется соотношением $\Delta\mathbf{\Lambda} = \tilde{\mathbf{\Lambda}}^* \circ \mathbf{\Lambda}$, в силу которого начальное условие для кватернионного уравнения (4) определяется заданными значениями $\mathbf{\Lambda}^0$, $\mathbf{\Lambda}^*$ кватернионов начальной и конечной ориентаций орбиты КА: $\Delta\mathbf{\Lambda}(t_0) = \tilde{\mathbf{\Lambda}}^* \circ \mathbf{\Lambda}^0$; $\Delta\Phi$ и $\mathbf{e}_\Delta$ являются для текущего момента времени t соответственно эйлеровым углом и единичным вектором эйлеровой оси возмущенного конечного поворота орбиты КА относительно ее невозмущенного углового положения, задаваемого кватернионом поворота $\mathbf{\Lambda}^*$.

При непосредственном использовании переменных $\Delta\Phi$, $e_{\Delta i}$ (i=1,2,3) для решения задачи переориентации орбиты КА необходимо рассматривать дифференциальные уравнения возмущенного движения центра масс КА в этих переменных. Эти уравнения получаются из кватернионного уравнения (4) при выделении в нем скалярной и векторной частей и имеют вид

$$d\Delta\Phi/dt = \mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{e}_\Delta = (r(\varphi)/c)\, u\, (\cos\varphi\, e_{\Delta 1} + \sin\varphi\, e_{\Delta 2}), \tag{5}$$

$$2(d\mathbf{e}_\Delta/dt)_l = \mathbf{e}_\Delta \times \mathbf{\Omega} + \mathrm{ctg}({}^1/{}_2\Delta\Phi)(\mathbf{e}_\Delta \times (\mathbf{\Omega} \times \mathbf{e}_\Delta)),\ \ \Delta\Phi \neq 0. \tag{6}$$

Отметим, что уравнение (5) справедливо для любого $\Delta\Phi$, а уравнение (6) – для $\Delta\Phi \neq 0$, и производная в векторном уравнении (6) является локальной.

Решение задачи переориентации орбиты КА в соответствии с методом теории устойчивости и управления движением твердого тела, предложенным в [3], может быть получено на основе рассмотрения лишь одного скалярного дифференциального уравнения (5).

2. Оптимальная переориентация орбиты космического аппарата за фиксированное время. С использованием эйлерова описания поворота орбиты в пространстве задача оптимальной переориентации орбиты космического аппарата может быть сформулирована следующим образом.

Требуется построить управление

$$U = \mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{e}_\Delta = (r(\varphi)/c)\, u\, (\cos\varphi(t)\, e_{\Delta_1} + \sin\varphi(t)\, e_{\Delta_2}), \tag{7}$$

переводящее орбиту космического аппарата, изменение ориентации которой описывается уравнением

$$d\Delta\Phi/dt = U = \mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{e}_\Delta = (r(\varphi)/c)\, u\, (\cos\varphi(t)\, e_{\Delta_1} + \sin\varphi(t)\, e_{\Delta_2}), \qquad (8)$$

из начального положения, описываемого кватернионом ориентации $\mathbf{\Lambda}_0$, в конечное положение, описываемое кватернионом ориентации $\mathbf{\Lambda}^*$, за фиксированное время t_1. При этом должен минимизироваться функционал качества

$$J = \int_0^{t_1} (\pm\, {}^1/_2\, \alpha_1 (\Delta\Phi)^2 + {}^1/_2\, \alpha_2 U^2) dt = \int_0^{t_1} (\pm\, {}^1/_2\, \alpha_1 (\Delta\Phi)^2 + {}^1/_2\, \alpha_2 (\Delta\dot{\Phi})^2) dt, \qquad (9)$$

где α_1, α_2 – положительные весовые коэффициенты.

Управление U здесь имеет смысл проекции вектора $\mathbf{\Omega}$ абсолютной угловой скорости орбиты на направление $\mathbf{e}_\Delta$ эйлеровой оси конечного поворота орбиты. Это "новое" управление U содержит, как видно из (7), "старое" управление u.

Краевые условия по переменной $\Delta\Phi$ (эйлерову углу поворота орбиты) определяются соотношениями

$$\Delta\Phi(t_0) = \Delta\Phi(0) = 2 \arccos\, scal(\tilde{\mathbf{\Lambda}}^* \circ \mathbf{\Lambda}^0),\ \ \Delta\Phi(t_1) = 0. \qquad (10)$$

Решение поставленной задачи с использованием принципа максимума Понтрягина дает закон оптимального управления

$$U = -k\Delta\Phi(0) \left[\sin(kt) + \frac{\cos(kt_1)}{\sin(kt_1)} \cos(kt) \right],\ \ k = \sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}}, \qquad (11)$$

для знака " $-$ " в подынтегральном выражении (9) и закон

$$U = k\Delta\Phi(0) \left[sh(kt) - \frac{ch(kt_1)}{sh(kt_1)} ch(kt) \right],\ \ k = \sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}} \qquad (12)$$

для знака " $+$ ".

Оптимальные законы изменения эйлерова угла поворота орбиты КА, удовлетворяющие краевым условиям (10) и соответствующие управлениям (11) и (12), имеют вид (13) и (14)

$$\Delta\Phi(t) = \Delta\Phi(0) \left[\cos(kt) - \frac{\cos(kt_1)}{\sin(kt_1)} \sin(kt) \right],\ \ k = \sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}}, \qquad (13)$$

$$\Delta\Phi(t) = \Delta\Phi(0) \left[ch(kt) - \frac{ch(kt_1)}{sh(kt_1)} sh(kt) \right],\ \ k = \sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}} \qquad (14)$$

соответственно. В соотношении (13) $t_1 \neq \frac{n\pi}{k},\ n = 1, 2, 3, \ldots$.

Физическое управление u имеет вид

$$u = -k\Delta\Phi(0)\frac{c}{p}\frac{1+e\cos\varphi}{e_{\Delta_1}\cos\varphi + e_{\Delta_2}\sin\varphi}\left[\sin(kt) + \frac{\cos(kt_1)}{\sin(kt_1)}\cos(kt)\right]$$

для знака "–" в подынтегральном выражении (9) и

$$u = k\Delta\Phi(0)\frac{c}{p}\frac{1+e\cos\varphi}{e_{\Delta_1}\cos\varphi + e_{\Delta_2}\sin\varphi}\left[sh(kt) - \frac{ch(kt_1)}{sh(kt_1)}ch(kt)\right]$$

для знака "+".

При этом должно выполняться условие

$$e_{\Delta_1}\cos\varphi + e_{\Delta_2}\sin\varphi \neq 0.$$

Заключение. Предложено аналитическое решение задачи переориентации орбиты КА за фиксированное время посредством реактивной тяги, ортогональной плоскости орбиты КА. Для построения управления, оптимального в смысле минимума интегрального квадратичного функционала качества, использован новый метод теории устойчивости и управления движением, предложенный в [3]. Этот метод позволяет заменить традиционное, как правило, численное решение рассматриваемой задачи управления в трехмерном пространстве угловых элементов орбиты, содержащем особые точки, регулярным аналитическим решением задачи управления для системы с одной степенью свободы, в качестве фазовой координаты которой выступает эйлеров угол поворота орбиты КА.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 05-01-00347).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Челноков Ю.Н.* Применение кватернионов в задачах оптимального управления движением центра масс космического аппарата в ньютоновском гравитационном поле. Ч. I // Космические исследования. 2001. Т. 39, № 5. С. 502–517.

2. *Челноков Ю.Н.* Кватернионные и бикватернионные модели и методы механики твердого тела и их приложения: Геометрия и кинематика движения. М.: Физматлит, 2006. 512 с.

3. *Челноков Ю.Н.* Об одной концепции в теории устойчивости и управления движением твердого тела, основывающейся на теоремах Эйлера – Даламбера и Шаля // Гироскопия и навигация. 2004. № 3 (46). С. 107–118.